

MATEMÁTICA - 3º ciclo

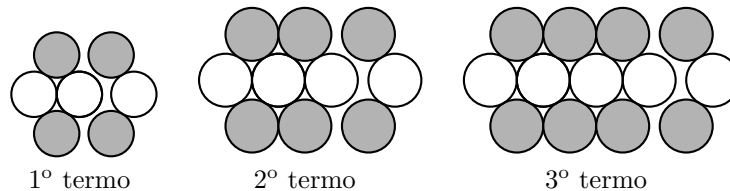
Sequências e sucessões (7º ano)

Propostas de resolução

Exercícios de provas nacionais e testes intermédios

1. Considerando que o primeiro termo é constituído por 4 círculos (2 brancos e dois cinzentos) e mais 3 círculos (dois cinzentos e um branco), e que em cada termo são adicionados mais 3 círculos (dois cinzentos e um branco), o termo de ordem n terá um total de 4 segmentos de reta, mais $3 \times n$ segmentos adicionados, ou seja, um total de:

$$4 + \underbrace{3 + 3 + \dots + 3}_{n \text{ vezes}} = 4 + 3 \times n = 3n + 4 \text{ círculos}$$



Resposta: **Opção C**

Prova Final 3º Ciclo – 2018, Época especial

2. Como o aparelho foi reprogramado depois do primeiro dia, recolheu 12 amostras no primeiro dia e 6 em cada um dos dias seguintes:

$$\underbrace{12}_{1^\circ \text{ dia}} + \underbrace{6 + 6 + 6 + \dots + 6}_{n-1 \text{ dias}} \quad \text{com } n \text{ dias}$$

Assim temos que o número total de amostras de água recolhidas pelo aparelho é dado por:

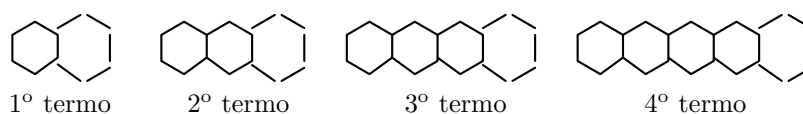
$$12 + \underbrace{6 + 6 + 6 + \dots + 6}_{n-1 \text{ vezes}} = 12 + 6 \times (n - 1) = 12 + 6(n - 1)$$

Resposta: **Opção D**

Prova Final 3º Ciclo - 2018, 2ª fase

3. Considerando que o primeiro termo é constituído por um hexágono completo (6 segmentos de reta) e mais 5 segmentos de reta, e que em cada termo são adicionados 5 segmentos de reta, o termo de ordem n terá um total de 6 segmentos de reta, mais $5 \times n$ segmentos adicionados, ou seja, um total de:

$$6 + \underbrace{5 + 5 + \dots + 5}_{n \text{ vezes}} = 6 + 5 \times n = 5n + 6 \text{ segmentos}$$



Resposta: **Opção C**

Prova Final 3º Ciclo - 2018, 1ª fase



4. Como o 1º. termo tem oito triângulos e cada termo tem mais quatro triângulos que o anterior, o 2º. termo tem $8 + 4 = 12$ triângulos.

Assim apenas a expressão $4n + 4$ pode representar o número de triângulos do termo de ordem n , porque as restantes três expressões têm valores numéricos diferentes de 12 para $n = 2$ ($2 + 4 = 6$; $4 \times 2 = 8$ e $8 \times 2 = 16$)

Resposta: **Opção B**

Prova de Aferição 8º ano - 2018

5. Verificando que em cada termo:

- o número de cubos cinzentos é igual à ordem do termo, ou seja, existem n cubos cinzentos no termo de ordem n
- o número de cubos brancos é igual à diferença entre o número total de cubos (n^2) e o número de cubos cinzentos (n)

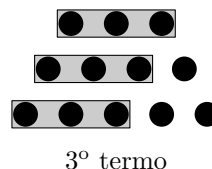
Então uma expressão que represente o número de cubos brancos do termo de ordem n da sucessão é:

$$n^2 - n$$

Prova Final 3º Ciclo – 2017, Época especial

6. Verificando que em cada termo da sequência, os círculos estão dispostos em três linhas, em que:

- a linha de cima tem exatamente o número de círculos da ordem do termo
- a linha do meio tem mais um círculo que a linha de cima
- a linha de baixo tem mais um círculo que a linha do meio, ou ainda, mais dois círculos que a linha de cima



Assim, o 100.º termo da sequência tem 100 círculos na linha de cima, $100 + 1 = 101$ círculos na linha do meio e $100 + 2 = 102$ na linha de baixo, pelo que somando o número de círculos das três linhas do 100.º termo da sequência, obtemos:

$$100 + 101 + 102 = 303 \text{ círculos}$$

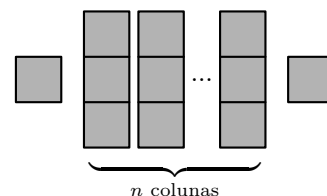
Prova Final 3º Ciclo - 2017, 1ª fase

7. Considerando cada termo da sequência constituído por:

- um quadrado à esquerda
- um conjunto de quadrados na zona central, e verificando que a zona central tem n colunas com 3 quadrados cada
- um quadrado à direita

temos que no termo de ordem n , existem 2 quadrados nos extremos e mais n colunas com 3 quadrados, ou seja:

$$2 + n \times 3 = 3n + 2 \text{ quadrados}$$



Resposta: **Opção D**

Prova Final 3º Ciclo – 2016, Época especial

8. Recorrendo à expressão dada, podemos calcular o número total de círculos no 100º termo:

$$3 \times 100 + 6 = 300 + 6 = 306$$

Observando a regularidade de que o número de círculos pretos, em cada termo, é igual ao número do termo, ou seja o termo de ordem n tem n círculos pretos, vem que o 100º termo tem 100 círculos pretos.

Assim o número de círculos brancos do 100º termo, pode ser calculado como a diferença entre o número total de círculos deste termo, e o número de círculos pretos, ou seja:

$$306 - 100 = 206 \text{ círculos brancos}$$

Prova Final 3º Ciclo - 2016, 2ª fase



9. O termo de ordem n desta sequência tem n bolas pretas e um total de n^2 bolas, pelo que o número de bolas brancas, do termo de ordem n é

$$n^2 - n$$

Assim, o décimo termo da sequência, tem

$$10^2 - 10 = 100 - 10 = 90 \text{ bolas brancas}$$

Prova Final 3º Ciclo – 2015, Época especial

10. Organizado os dados numa tabela, podemos obter os quatro primeiros termos da sequência subtraindo sucessivamente 3 a cada termo, partindo do quinto termo:

Ordem	1	2	3	4	5
Termo	2	5	8	11	14

Pela observação da tabela podemos verificar que todos os termos da sequência diferem de 1 unidade de um múltiplo de 3. Assim, temos que

- 8 é um termo da sequência, porque $8 = 3 \times 3 - 1$
- 80 é um termo da sequência porque $80 = 3 \times 27 - 1$
- 800 é um termo da sequência porque $800 = 3 \times 267 - 1$

Logo 88 não é um termo da sequência porque $88 = 3 \times 30 - 2$

Resposta: **Opção C**

Prova Final 3º Ciclo - 2014, 1ª chamada

11. A figura de ordem n desta sequência tem n círculos pretos e no topo um quadrado formado por n^2 círculos brancos.

Assim, a figura que tem 10 círculos pretos, tem, no topo, $10^2 = 100$ círculos brancos.

Logo, o número total de círculos da figura que tem 10 círculos pretos, é $10 + 100 = 110$

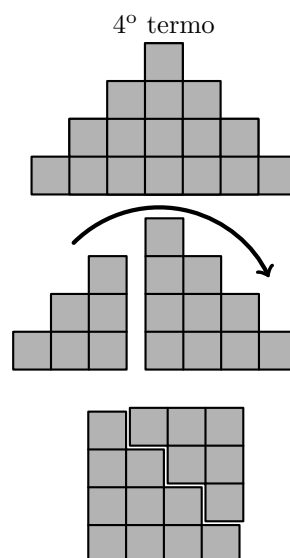
Teste Intermédio 9º ano – 21.03.2014

12. Considerando os termos da sequência do número de quadrados em cada figura numa tabela, temos:

Ordem	1	2	3	4	5
Termos	1	4	9	16	25

O que nos permite conjecturar que esta sequência é a sequência dos quadrados perfeitos... com efeito, é possível fazer um arranjo dos quadrados de cada termo da sequência no sentido de verificar que no termo de ordem n , temos exatamente n^2 quadrados (como na figura ao lado).

Assim, como $14^4 = 196$ e $15^2 = 225$, verificamos que 200 não é um quadrado perfeito, ou seja não existe nenhum termo na sequência constituído por 200 quadrados.



Prova Final 3º Ciclo - 2012, 2ª chamada



13. Verificando que o primeiro número de cada par ordenado pode ser obtido, somando ao primeiro número do par anterior o número de ordem desse termo, temos

1º termo	(1,2)	
2º termo	(1 + 2,...)	(3,...)
3º termo	(3 + 3,...)	(6,...)
4º termo	(6 + 4,...)	(10,...)
5º termo	(10 + 5,...)	(15,...)
6º termo	(15 + 6,...)	(21,...)
7º termo	(21 + 7,...)	(28,...)
8º termo	(28 + 8,...)	(36,...)

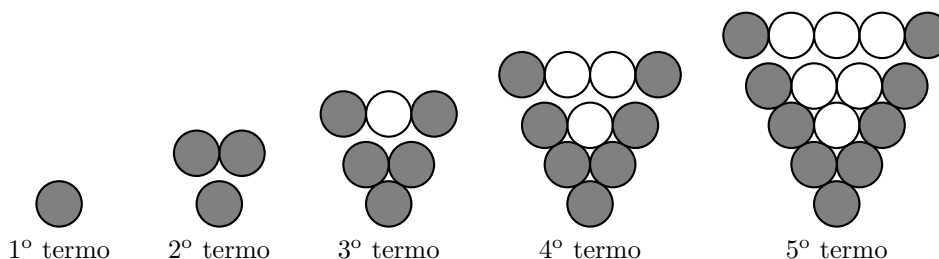
Verificando também que o segundo número de cada par ordenado pode ser obtido, somando ao segundo número do par anterior o número de ordem desse termo mais uma unidade, temos

1º termo	(1,2)	
2º termo	(...,2 + 2 + 1)	(...,5)
3º termo	(...,5 + 3 + 1)	(...,9)
4º termo	(...,9 + 4 + 1)	(...,14)
5º termo	(...,14 + 5 + 1)	(...,20)
6º termo	(...,20 + 6 + 1)	(...,27)
7º termo	(...,27 + 7 + 1)	(...,35)
8º termo	(...,35 + 8 + 1)	(...,44)

Assim, podemos constatar que o oitavo termo desta sequência é o par ordenado (36,44)

Prova Final 3º Ciclo - 2012, 1ª chamada

14. Para obter o termo de ordem n adicionam-se exatamente n círculos ao termo anterior (como se pode ver na figura seguinte).



Assim, como o primeiro termo tem 1 círculo, então o termo de ordem 100 tem um número total de círculos igual à soma dos cem primeiros números naturais.

Como a linha superior do termo de ordem 100 tem 100 círculos, podemos verificar que a linha mais exterior do lado direito também terá 100 círculos (pretos), tal como a linha exterior da esquerda. Lembrando que o círculo situado mais abaixo, pertence a ambas as linhas de círculos pretos, o número de círculos pretos do termo de ordem 100 é

$$100 + 100 - 1 = 199$$

Teste Intermédio 9º ano - 10.05.2012

15.

- 15.1. Pela observação dos quatro primeiros termos é possível afirmar que o termo de ordem n tem n azulejos brancos, pelo que o termo de ordem 2012, ou o 2012º termo, terá 2012 azulejos brancos.

Resposta: **Opção B**

- 15.2. Calculando o número total de azulejos em cada termo como a soma dos azulejos brancos e cinzentos, temos

- 1º termo: 1 branco e 1×2 cinzentos, $1 + 1 \times 2 = 3$ azulejos
- 2º termo: 2 brancos e 2×3 cinzentos, $2 + 2 \times 3 = 7$ azulejos
- 3º termo: 3 brancos e 3×4 cinzentos, $3 + 3 \times 4 = 15$ azulejos
- 4º termo: 4 brancos e 4×5 cinzentos, $4 + 4 \times 5 = 24$ azulejos

Assim, identificando a regularidade podemos calcular o número total de azulejos do 9º termo da sequência:

$$9^\circ \text{ termo: } 9 \text{ brancos e } 9 \times 10 \text{ cinzentos, } 9 + 9 \times 10 = 99 \text{ azulejos}$$

Teste Intermédio 8º ano - 29.02.2012



16. Observando a tabela podemos concluir que cada termo é obtido adicionado 3 unidades ao termo anterior, pelo que podemos comparar a sequência com a sequência de termo geral $3n$, e perceber que adicionando 2 unidades aos termos da sequência de termo geral $3n$ obtemos os termos da sequência dada.

	1º termo	2º termo	3º termo	4º termo	...	12.º termo	...
	5	8	11	14	...	38	...
$3n$	3	6	9	12	...	36	...
$3n + 2$	$3+2=5$	$6+2=8$	$9+2=11$	$12+2=14$...	$36+2=38$...

Como o termo geral da sequência é $3n + 2$ podemos averiguar se existe uma ordem, n , que corresponda ao termo 512, resolvendo a equação $3n + 2 = 512$:

$$3n + 2 = 512 \Leftrightarrow 3n = 512 - 2 \Leftrightarrow 3n = 510 \Leftrightarrow n = \frac{510}{3} \Leftrightarrow n = 170$$

Logo podemos afirmar que sim, o 170º termo da sequência é 512

Exame Nacional 3º Ciclo – 2011, Época Especial

17.

- 17.1. Observando os termos da sequência, podemos observar que no termo de ordem n , existem n bolas pretas, o triplo de bolas brancas ($3n$) e ainda uma bola branca adicional colocada em baixo.

Assim, para construir o 7º termo da sequência são necessárias 7 bolas pretas, 3×7 bolas brancas, e 1 bola branca adicional, num total de

$$7 + 3 \times 7 + 1 = 7 + 21 + 1 = 29 \text{ bolas}$$

- 17.2. Como cada termo da sequência, tem n bolas pretas, $3n$ bolas brancas e ainda uma bola branca adicional colocada em baixo, descontando a bola branca adicional, cada termo pode ser dividido em 4 partes, sendo uma dessas partes constituída por bolas brancas e as restantes 3 partes formada por bolas brancas.

Assim, descontando a bola branca adicional, temos

$$493 - 1 = 492$$

Dividindo as 492 em 4 partes, determinamos o número de bolas pretas:

$$\frac{492}{4} = 123 \text{ bolas pretas}$$

E, retirando ao total o número de bolas pretas, calculamos o número de bolas brancas do termo com 493 bolas:

$$493 - 123 = 370 \text{ bolas brancas}$$

Exame Nacional 3º Ciclo – 2011, 2ª chamada

18. Identificando a regularidade dos termos da sequência, podemos observar que cada termo corresponde ao quadrado da sua ordem

1º termo	2º termo	3º termo	...	10.º termo	...
1	4	9	...	100	...
1^2	2^2	3^2	...	10^2	...

Assim, podemos determinar outros termos da sequência:

- 11º termo: $11^2 = 121$
- 12º termo: $12^2 = 144$
- 13º termo: $13^2 = 169$

Como $169 - 144 = 25$ podemos afirmar que os dois termos consecutivos da sequência cuja diferença é 25, são o 13º termo e o 12º termo, ou seja, os termos 169 e 144

Teste Intermédio 9º ano – 17.05.2011

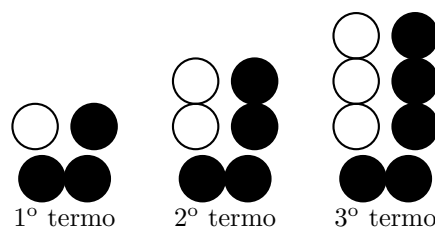


19.

- 19.1. Considerando separadamente as duas bolas pretas da linha inferior, e as restantes separadamente, podemos ver que no termo de ordem n , existem n bolas brancas, n bolas pretas e ainda as duas bolas pretas da linha inferior.

Assim, para construir o 7.º termo da sequência, são necessárias 7 bolas brancas, mais 7 bolas pretas (dispostas ao lado das brancas) e mais duas bolas pretas (colocadas em baixo), ou seja, um total de

$$7 + 7 + 2 = 16 \text{ bolas}$$



- 19.2. Considerando a separação das bolas em 3 grupos no termo com da sequência que tem um total de 108 bolas, podemos constatar que se retirarmos as 2 bolas pretas da linha inferior, restam $108 - 2 = 106$ bolas.

As 106 bolas devem ser divididas em dois grupos com o mesmo número de bolas, ou seja, descontando as bolas pretas da linha inferior, existem $\frac{106}{2} = 53$ bolas pretas e 53 bolas brancas.

Desta forma o número total de bolas pretas do termo da sequência que tem 108 bolas é

$$2 + \frac{108 - 2}{2} = 2 + 53 = 55$$

Teste Intermédio 8º ano – 11.05.2011

20.

- 20.1. Verificando que o termo de ordem n existem 4 conjuntos de quadrados com n quadrados e ainda um quadrado no dentro da figura, podemos afirmar que para construir o termo de ordem 7 serão necessários 4 conjuntos de 7 quadrados mais 1 que irá ocupar a posição central, ou seja, são necessários

$$4 \times 7 + 1 = 28 + 1 = 29 \text{ quadrados}$$

- 20.2. Se existir um termo com 389 quadrados, então descontando o quadrado da posição central, os quadrados restantes devem ser agrupados em 4 conjuntos com o mesmo número de quadrados.

Como $389 - 1 = 388$ e $\frac{388}{4} = 97$, temos que o termo de ordem 97 tem 389 quadrados (1 quadrado central e 4 conjuntos com 97 quadrados), ou seja, existe um termo com 389 quadrados.

Teste Intermédio 9º ano – 07.02.2011

21.

- 21.1. Observando os primeiros 3 termos da sequência, é possível verificar que em cada termo são acrescentadas 4 peças retangulares ao termo anterior (uma em cada lado do quadrado).

Assim, somando sucessivamente 4 ao termo anterior, podemos descobrir o número de peças da 5ª construção:

- 1ª construção: 6 peças
- 2ª construção: $6+4=10$ peças
- 3ª construção: $10+4=14$ peças
- 4ª construção: $14+4=18$ peças
- 5ª construção: $18+4=22$ peças

- 21.2. Como todos os termos são obtidos somando 4 unidades ao anterior e o primeiro termo é um número par, todos os termos da sequência terão um número par de peças, pelo que podemos afirmar que nenhuma construção terá 2503 peças, porque 2503 é um número ímpar.

Teste Intermédio 8º ano – 27.04.2010



22.

22.1. Podemos identificar em cada construção, quadrados divididos em 2 triângulos do tipo dos que são contados.

Verificando que

- na 1ª construção existe 1 quadrado, e por isso, $2 \times 1 = 2$ triângulos
- na 2ª construção existem $2^2 = 4$ quadrados, e por isso, $2 \times 4 = 8$ triângulos
- na 3ª construção existem $3^2 = 9$ quadrados, e por isso, $2 \times 9 = 18$ triângulos

então na 5ª construção existem $5^2 = 25$ quadrados, e por isso, $2 \times 25 = 50$ triângulos.

22.2. De acordo com a verificação anterior podemos afirmar que na construção de ordem n existem n^2 quadrados, e por isso, $2 \times n^2 = 2n^2$ triângulos.

Resposta: **Opção D**

Teste Intermédio 9º ano – 03.02.2010

23. Podemos verificar que o aumento do número de visitantes é constante porque o aumento de 2004 par 2005 foi de $7,5 - 6,7 = 0,8$ milhões, e de 2005 para 2006 também foi de $8,3 - 7,5 = 0,8$

Logo, para atingir os 15,5 milhões de visitantes é necessário um aumento total, relativamente ao ano de 2006 de $15,5 - 8,3 = 7,2$ milhões.

Supondo que o aumento nos anos seguintes se mantém constante, então dividindo o aumento necessário por 0,8, obtemos o número de anos correspondentes a esse aumento global:

$$\frac{7,2}{0,8} = 9$$

Ou seja, 9 anos depois de 2006, o aumento total foi de $9 \times 0,8 = 7,2$ milhões, o que corresponde a um número de visitantes de $8,3 + 7,2 = 15,5$ milhões.

Como 9 anos depois de 2006 é o ano $2006 + 9 = 2015$, este é o ano em que haverá 15,5 milhões de visitantes.

Exame Nacional 3º Ciclo – 2009, 1ª chamada

24. Como o primeiro termo é 244, seguindo a lei de formação, temos que os termos seguintes são:

- 2º termo: $\frac{244 + 2}{3} = \frac{246}{3} = 82$
- 3º termo: $\frac{82 + 2}{3} = \frac{84}{3} = 28$

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 8º ano – 30.04.2009

25. Se aos 20 cm subtrairmos a altura da boneca mais pequena, obtemos:

$$20 - 1 = 19 \text{ cm}$$

Ou seja, se existir uma boneca com 20 cm, então os 19 cm de diferença para a boneca mais pequena estão repartidos em partes iguais de 0,75 cm, que corresponde à diferença de alturas entre duas bonecas consecutivas.

Como $\frac{19}{0,75} \approx 25,3$ não é um número inteiro, não é possível, adicionar a 1, 0,75 sucessivamente até atingir 20, ou seja, não existe, na série das bonecas descrita, uma boneca com 20 cm de altura.

Podemos confirmar esta impossibilidade calculando a altura da 25ª boneca ($1 + 25 \times 0,75 = 19,75$) e da 26ª boneca ($1 + 26 \times 0,75 = 20,5$).

Exame Nacional 3º Ciclo – 2008, 2ª chamada



26. Como cada fila tem menos 3 cadeiras que a anterior, se subtraímos 3 sucessivamente ao número de cadeiras da primeira fila (23) até obtermos o número de cadeiras da última fila (8), temos:

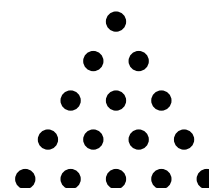
- 1ª fila: 23 cadeiras
- 2ª fila: $23-3=20$ cadeiras
- 3ª fila: $20-3=17$ cadeiras
- 4ª fila: $17-3=14$ cadeiras
- 5ª fila: $14-3=11$ cadeiras
- 6ª fila: $11-3=8$ cadeiras

Assim, podemos concluir que a sala tem 6 filas de cadeiras.

Exame Nacional 3º Ciclo – 2008, 1ª chamada

27. Podemos verificar que cada termo é obtido a partir do anterior somando o número natural que corresponde à ordem do termo, e determinar todos os termos até ao quinto, por este processo:

- 1º termo: 1
- 2º termo: $1+2=3$
- 3º termo: $3+3=6$
- 4º termo: $6+4=10$
- 5º termo: $10+5=15$



Em alternativa, podemos representar o quinto termo da sequência (como na figura ao lado), e observar que o número de pontos neste termo é 15.

15

Teste Intermédio 8º ano – 30.04.2008

28.

28.1. Como a sequência sugere, cada termo pode ser obtido adicionando ao anterior o valor 0,0909. Assim, o 5º termo da sequência pode ser obtido, somando ao 4º termo 0,0909, ou seja:

$$0,3636 + 0,0909 = 0,4545$$

28.2. Como cada termo pode ser obtido adicionando ao anterior o valor 0,0909, e o primeiro termo é também 0,0909, o termo de ordem n é $n \times 0,0909$, porque resulta de adicionar 0,0909, n vezes. Assim calculando alguns termos da sequência, temos:

- 10º termo: $10 \times 0,0909 = 0,909$
- 11º termo: $11 \times 0,0909 = 0,9999$
- 12º termo: $12 \times 0,0909 = 1,0908$

Desta forma o primeiro termo da sequência que é maior que 1, é o 12º termo, ou seja 1,0908

Prova de Aferição – 2004

29.

29.1.

29.1.1. Como em todas as figuras apresentadas existem 2 azulejos brancos, então na figura 5 também existem 2 azulejos brancos.

29.1.2. Como na figura 1 existem 3 azulejos cinzentos, na figura 2 existem 6 (ou seja 2×3), e na figura 3 existem 9 (ou seja 3×3) e na figura 4 existem 12 (ou seja 4×3), então na figura 5 existem

$$5 \times 3 = 15 \text{ azulejos cinzentos}$$



29.2. Como $22 \times 3 = 66$ então na figura 22 existem 66 azulejos cinzentos, pelo que somando os 2 brancos, resultam num total de $66 + 2 = 68$ azulejos.

A figura anterior, ou seja, a figura 21 tem $21 \times 3 = 63$ azulejos cinzentos, pelo que somando os 2 brancos, resultam num total de $63 + 2 = 65$ azulejos.

Assim, como a figura 21 tem menos que 66 azulejos (tal como todas as figuras anteriores) e a figura 22 tem mais que 66 (tal como todas as figuras seguintes), então não existe qualquer figura com um total de 66 azulejos.

29.3. Como a figura 1 tem 3 azulejos cinzentos e cada figura tem mais 3 azulejos cinzentos que a anterior, na figura de ordem n terão sido adicionados 3 azulejos cinzentos por n vezes, ou seja o número de azulejos cinzentos é:

$$n \times 3$$

Prova de Aferição – 2003

30. Observando o triângulo podemos verificar que o número de elementos de cada linha pode ser decomposto em duas parcelas, uma com o número da linha e outra com menos um elemento:

Linha 1: $1 + (1 - 1) = 1 + 0 = 1$						1								
Linha 2: $2 + (2 - 1) = 2 + 1 = 3$						1	2	1						
Linha 3: $3 + (3 - 1) = 3 + 2 = 5$						1	2	3	2	1				
Linha 4: $4 + (4 - 1) = 4 + 3 = 7$						1	2	3	4	3	2	1		
Linha 5: $5 + (5 - 1) = 5 + 4 = 9$						1	2	3	4	5	4	3	2	1

Assim, o número de elementos da 112ª linha pode ser calculado como a soma de duas parcelas:

$$112 + (112 - 1) = 112 + 111 = 223$$

Prova de Aferição – 2002

- 31.
- Na primeira eliminatória, como há 16 jogadores e se realizam $\frac{16}{2} = 8$ jogos, existem 8 jogadores apurados para a eliminatória seguinte.
 - Assim na segunda eliminatória, existem 8 jogadores e são realizados $\frac{8}{2} = 4$ jogos, pelo que serão 4 jogadores apurados para a eliminatória seguinte.
 - Na terceira eliminatória, como existem 4 jogadores o número de jogos realizados são $\frac{4}{2} = 2$ jogos, e serão apurados para a eliminatória seguinte 2 jogadores.
 - Finalmente, a quarta eliminatória consiste num único jogo entre os 2 jogadores apurados.

Assim, o número de jogos realizados durante todo o torneio é a soma do número de jogos realizados nas quatro eliminatórias, ou seja:

$$8 + 4 + 2 + 1 = 15 \text{ jogos}$$

Prova de Aferição – 2002

