

## Posições relativas de retas e planos (9.º ano)

Propostas de resolução

Exercícios de Provas Nacionais e Testes Intermédios



1. A única face do prisma triângular que não intersesta as restantes segundo um ângulo reto é a face correspondente ao painel solar, ou seja a face  $[ACDE]$ .

Assim, o plano que não é perpendicular ao plano que contém a face  $[ABFE]$  é o plano que contém a face  $[ACDE]$ , ou seja o plano  $EAC$ .

Resposta: **Opção B**

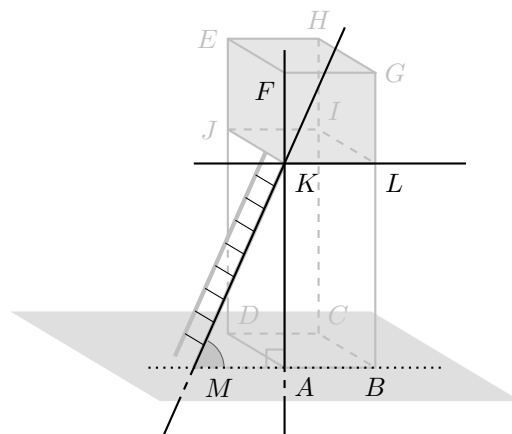
Prova Final 3.º Ciclo – 2019, Época especial

2. Observando cada uma das retas apresentadas nas diferentes opções, temos que:

- A reta  $[KM]$  intersesta o plano  $[ABCD]$  no ponto  $M$ , pelo que é secante ao plano e não é perpendicular porque  $\hat{AMK} = 66^\circ$
- A reta  $[AB]$  pertence ao plano  $[ABCD]$  porque sabemos que tem dois pontos em comum com o plano (os pontos  $A$  e  $B$ )
- A reta  $[AF]$  é perpendicular ao plano  $[ABCD]$  porque  $\hat{KAM} = 90^\circ$
- A reta  $[KL]$  é paralela ao plano  $[ABCD]$  porque pertence ao plano  $JKL$  e os planos  $JKL$  e  $EFG$  são paralelos.

Logo, de entre as opções apresentadas, a reta  $KM$  é única reta secante e não perpendicular ao plano que contém a base  $[ABCD]$

Resposta: **Opção A**

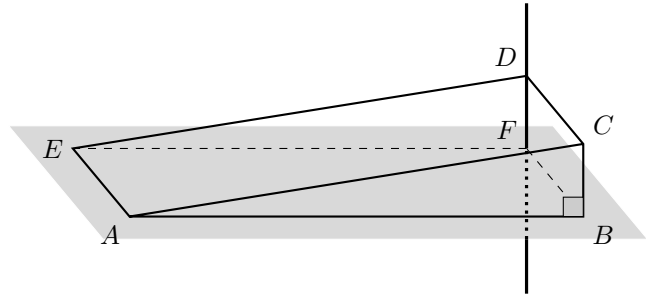


Prova Final 3.º Ciclo – 2019, 2.ª fase

3. Como o prisma triangular é reto, as faces  $ABFE$  e  $BCDF$  são perpendiculares.

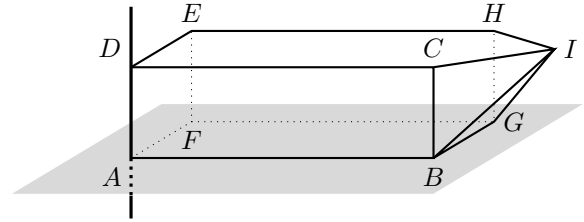
Desta forma, como a reta  $DF$  é perpendicular às retas  $FB$  e  $FE$ , e ambas pertencem ao plano que contém a face  $[ABFE]$ , podemos concluir que a reta  $DF$  é perpendicular ao plano que contém a face  $[ABFE]$ .

Resposta: **Opção B**



Prova Final 3.º Ciclo – 2019, 1.ª fase

4. Como o plano definido pelas retas  $AG$  e  $BF$  é o plano  $AFG$ , ou seja, o plano que contém a face lateral  $[AFGB]$  do paralelepípedo retângulo, então, qualquer reta que contenha uma aresta de uma base do paralelepípedo que não pertença a esta face nem seja paralela, é perpendicular a este plano, por exemplo a reta  $AD$ .

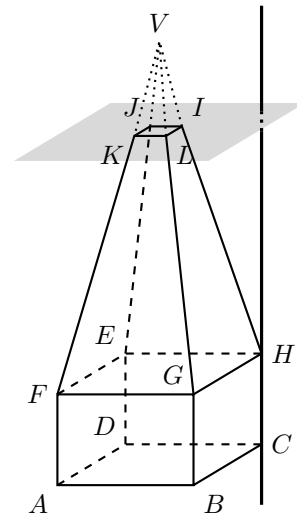


Prova Final 3.º Ciclo – 2018, Época especial

5. Como  $[ABCDEFGH]$  é prisma reto de bases quadradas, então a reta  $CH$  é perpendicular à face  $[EFGH]$ .

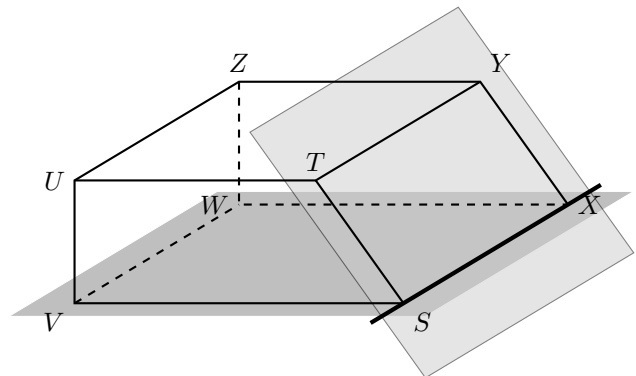
Como as faces  $[EFGH]$  e  $[IJKL]$  são paralelas, então a reta  $CH$  também é perpendicular à face  $[IJKL]$ , ou seja, ao plano que contém esta face.

Resposta: **Opção B**



Prova Final 3.º Ciclo – 2018, 2.ª fase

6. Como os dois planos contêm o ponto  $S$  e o ponto  $X$  e não são coincidentes, a sua interseção é a reta  $SX$ .

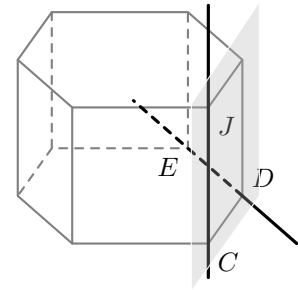


Prova Final 3.º Ciclo – 2018, 1.ª fase



7. As retas  $JC$  e  $ED$  não são coplanares, porque os pontos  $J$ ,  $C$  e  $D$  pertencem à mesma face do prisma, ou seja, ao mesmo plano, mas o ponto  $E$  não pertence ao mesmo plano, ou seja ao plano  $JCD$  (como se pretende ilustrar na figura ao lado).

Resposta: **Opção A**

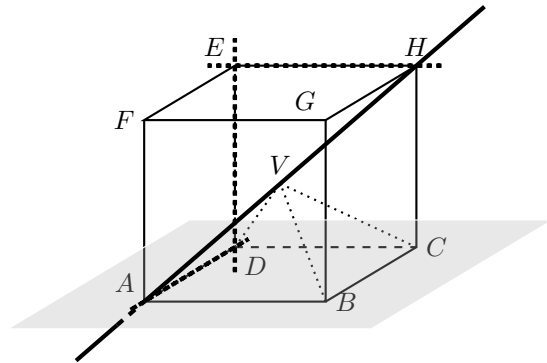


Prova Final 3.º Ciclo – 2017, Época especial

8. Verificando que as retas  $AD$ ,  $EH$  e  $ED$  contêm arestas do cubo, então, respetivamente, pertencem, são paralelas ou são perpendiculares ao plano que contém a face  $[ABCD]$  do cubo.

Assim, a reta  $AH$ , que contém uma diagonal do cubo, intersesta as seis faces do cubo sem ser perpendicular a nenhum deles, em particular é secante e não perpendicular ao plano que contém a face  $[ABCD]$

Resposta: **Opção A**



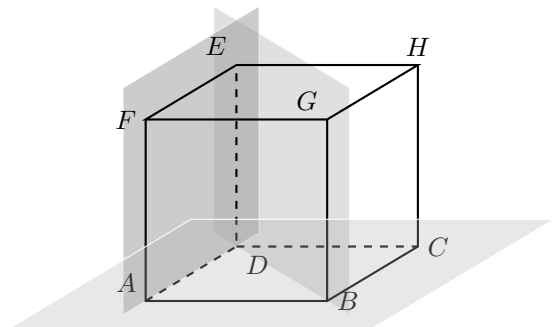
Prova Final 3.º Ciclo – 2017, 2.ª fase

9. Dois planos, ambos perpendiculares a um terceiro plano, não são necessariamente perpendiculares entre si.

Assim, temos que:

- o plano  $AFE$  é perpendicular ao plano  $ABC$  (porque contém faces adjacentes do cubo)
- o plano  $BDE$  também é perpendicular ao plano  $ABC$  (porque contém faces adjacentes do cubo)

Mas, como o ângulo  $ADB$  não é reto, os planos  $AFE$  e  $BDE$ , não são perpendiculares entre si.

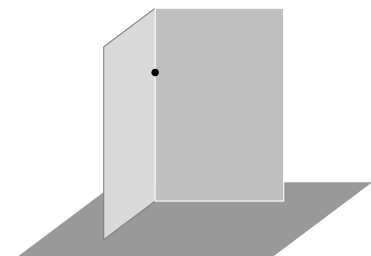


Prova Final 3.º Ciclo – 2017, 2.ª fase

10. Considerando três planos perpendiculares (como por exemplo no canto de uma sala) podemos identificar um plano e dois planos perpendiculares que contêm um ponto exterior ao primeiro plano.

Desta forma a afirmação "Por um ponto exterior a um plano passa um **único** plano perpendicular ao primeiro", é falsa.

Resposta: **Opção D**



Prova Final 3.º Ciclo – 2017, 1.ª fase

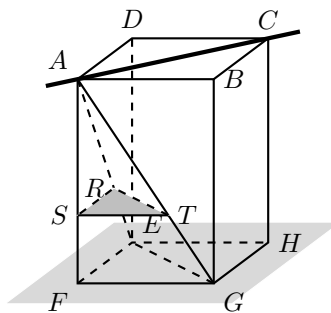


11. Como as bases de um prisma são paralelas entre si, qualquer reta contida no plano que contém a base superior do prisma  $[ABCD]$  é paralela ao plano que contém a base inferior do prisma  $[FGHE]$ .

Assim, uma reta paralela ao plano  $EFG$ , é, por exemplo:

a reta  $AC$

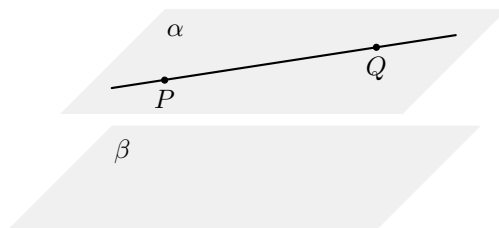
(Qualquer reta contida no plano  $RST$  também é paralela ao plano  $EFG$ ).



Prova Final 3.º Ciclo – 2017, 1.ª fase

12. Se os planos  $\alpha$  e  $\beta$  são paralelos, todas as retas contidas no plano  $\alpha$  são paralelas ao plano  $\beta$

Como os pontos  $P$  e  $Q$  pertencem ao plano  $\alpha$ , então a reta  $PQ$  está contida no plano  $\alpha$ , e por isso, é paralela ao plano  $\beta$

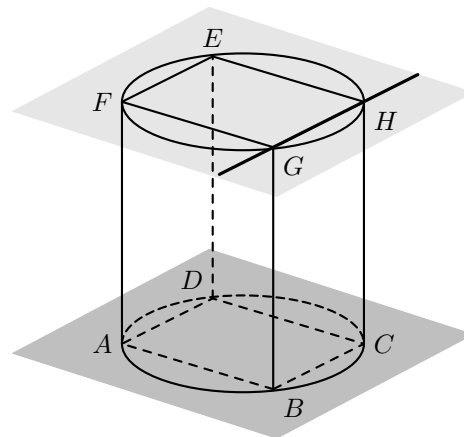


Prova Final 3.º Ciclo – 2016, Época especial

13. Como as bases do prisma são paralelas, qualquer reta do plano que contém a base superior é paralela ao plano que contém a base inferior.

Assim, uma reta paralela ao plano  $ABC$  (que contém a base  $[ABCD]$ ), é, por exemplo:

a reta  $GH$

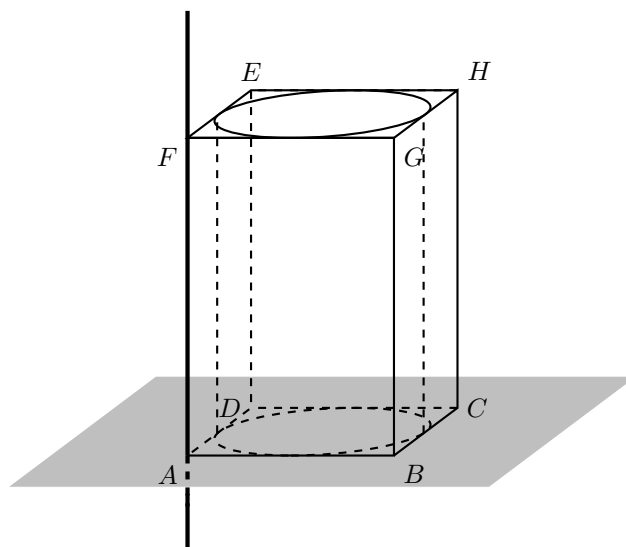


Prova Final 3.º Ciclo – 2016, 2.ª fase

14. Como as arestas laterais de um prisma são perpendiculares às bases do prisma, também o são relativamente ao plano que contém uma das bases do prisma.

Assim, uma reta perpendicular ao plano  $ABC$ , é, por exemplo:

a reta  $AF$



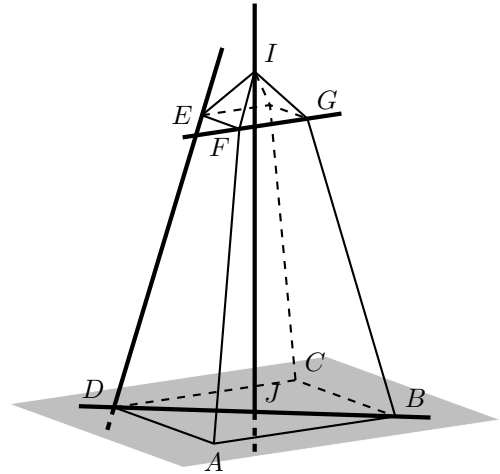
Prova Final 3.º Ciclo – 2016, 1.ª fase



15. Analisando as quatro retas indicadas podemos ver que
- a reta  $FG$  é paralela ao plano  $ABC$
  - a reta  $ED$  é concorrente, mas não perpendicular ao plano  $ABC$
  - a reta  $BD$  pertence ao plano  $ABC$

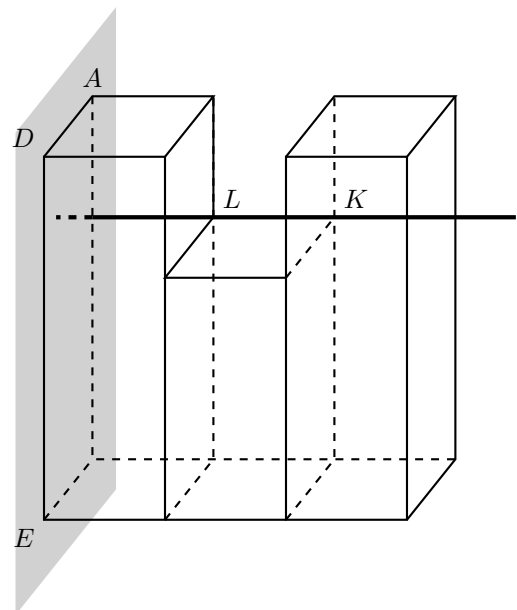
A reta  $IJ$  é perpendicular ao plano  $ABC$

Resposta: **Opção B**



Prova Final 3.º Ciclo – 2015, Época especial

16. Usando as letras da figura podemos definir seis retas perpendiculares ao plano  $ADE$ , por exemplo,  
a reta  $LK$

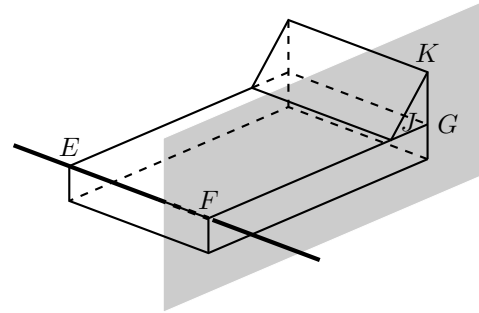
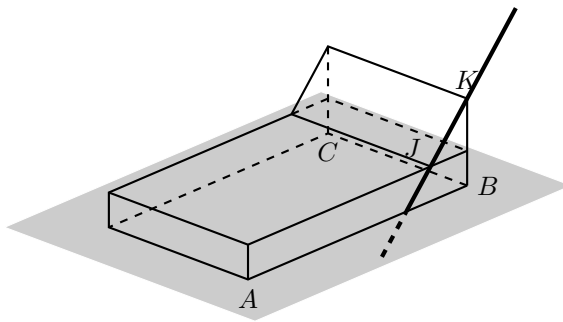


Prova Final 3.º Ciclo – 2015, 2.ª fase





21. Observando a reta  $KJ$  e o plano  $ABC$  (na figura seguinte, à esquerda), podemos verificar que a reta não é perpendicular nem paralela ao plano.



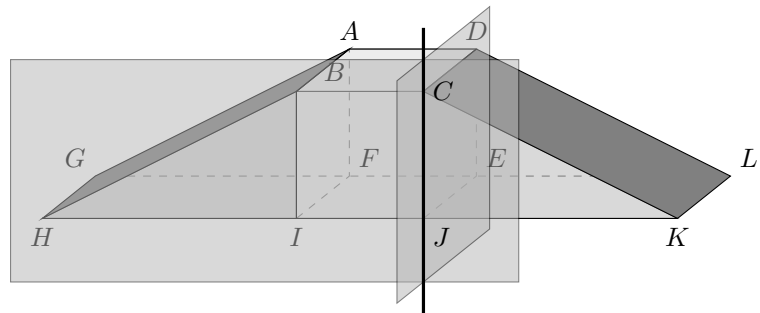
Observando a reta  $EF$  e o plano  $GJK$  (na figura acima, à direita), podemos verificar que a reta não é paralela ao plano, mas é perpendicular.

Resposta: **Opção D**

Teste Intermédio 9.º ano – 12.04.2013

22. Como o plano  $HIB$  contém toda a face anterior do sólido, e o plano  $JCD$  contém toda a face mais à direita do cubo (como podemos observar na figura ao lado), temos que a interseção dos planos  $HIB$  e  $JCD$  é a

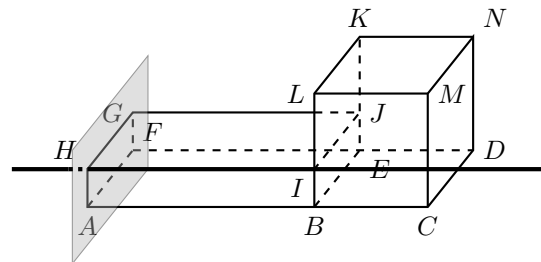
reta  $CJ$



Prova Final 3.º Ciclo - 2012, 2.ª chamada

23. Como o plano  $FGH$  contém a face  $[AFGH]$  do paralelepípedo, a aresta  $[HI]$  é perpendicular a esta face (como se pode observar na figura ao lado). Assim, uma reta que passe no ponto  $I$  e seja perpendicular ao plano  $FGH$  é

a reta  $HI$



Prova Final 3.º Ciclo – 2012, 1.ª chamada



24. Como o cubo é parcialmente mergulhado no recipiente com tinta, a uma das faces fica completamente pintada, outra mantém-se branca e as restantes 4 ficam parcialmente pintadas.

- Podemos **rejeitar** a **Planificação A** porque não tem nenhuma face completamente pintada.
- Podemos **rejeitar** a **Planificação D** porque a completamente pintada e a face totalmente branca são adjacentes e não opostas como no cubo mergulhado no recipiente.
- Podemos **rejeitar** a **Planificação B** porque a parte pintada das faces parcialmente pintadas não são adjacentes à face totalmente pintada como no cubo mergulhado no recipiente.

A Planificação C cumpre todas as condições que as restantes não verificam, pelo que é a planificação do cubo depois de retirado do recipiente.

Resposta: **Opção C**

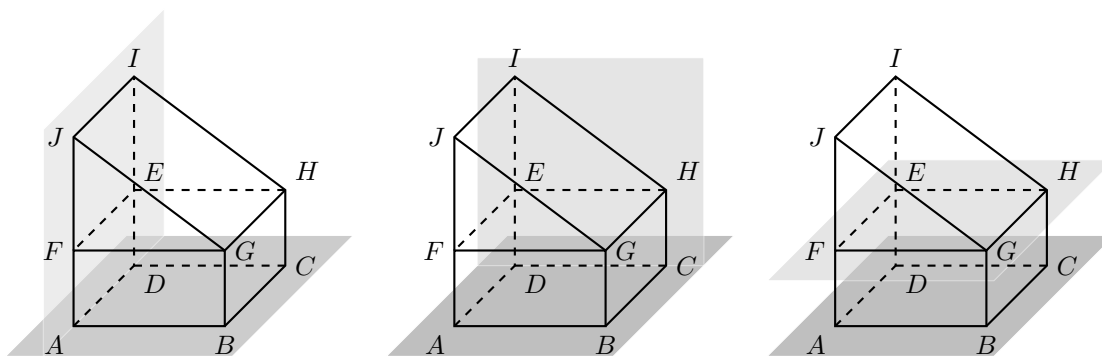
Prova Final 3.º Ciclo – 2012, 1.ª chamada

25. Como os três lados do triângulo são diagonais de quadrados congruentes, então o triângulo é equilátero. Como o triângulo é equilátero então as amplitudes dos ângulos internos são iguais, e a soma é  $180^\circ$ , pelo que

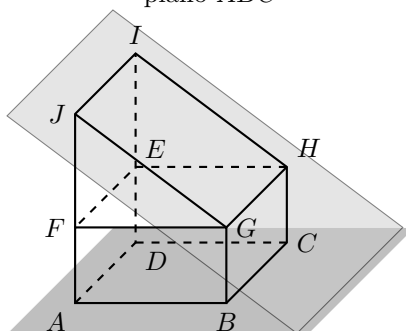
$$\hat{A}CB + \hat{A}BC + \hat{B}AC = 180 \Leftrightarrow 3 \times \hat{A}CB = 180 \Leftrightarrow \hat{A}CB = \frac{180}{3} \Leftrightarrow \hat{A}CB = 60^\circ$$

Teste Intermédio 8.º ano – 29.2.2012

26. Os planos  $IJF$  e  $IDC$  são concorrentes, mas também perpendiculares, com o plano  $ABC$ ; e o plano  $FGH$  é paralelo ao plano  $ABC$



De entre as opções apresentadas o plano  $IJG$  é o único plano concorrente, não perpendicular, com o plano  $ABC$



Resposta: **Opção B**

Prova Final 3.º Ciclo – 2011, Época especial



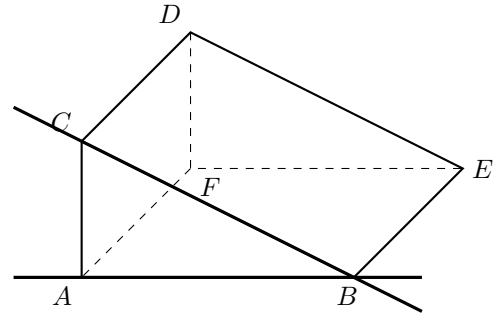


27.

- 27.1. Escolhendo uma mesma letra na definição das duas retas, é suficiente para garantir que as retas têm esse ponto em comum, ou seja são concorrentes.

Ainda assim existem várias escolhas possíveis, por exemplo

a reta  $BC$  e a reta  $BA$



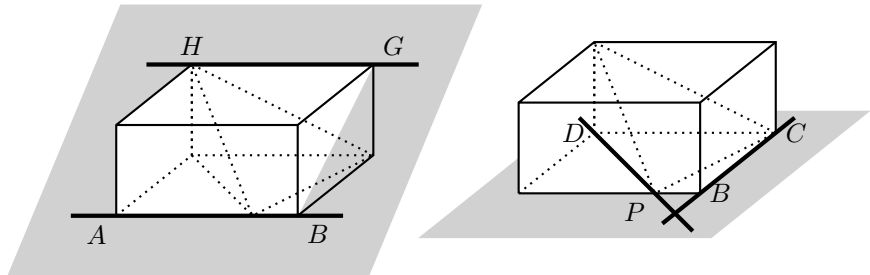
- 27.2. Como as faces triangulares do prisma são triângulos retângulos, podemos excluir a planificação A e a planificação B.

Como, o lado menor das faces triangulares é concorrente com as faces retangulares e não com as faces quadradas, também podemos excluir a planificação C.

Resposta: **Opção D**

Exame Nacional 3.º Ciclo - 2011, 2.ª chamada

28. As retas  $AB$  e  $HG$  são paralelas, pelo que não são concorrentes, mas existe um plano ao qual ambas pertence, ou seja, são coplanares.



As retas  $DP$  e  $BC$  pertencem ambas ao plano que contém a base inferior do paralelepípedo, ou seja, são coplanares e intersectam-se no prolongamento das arestas  $[DP]$  e  $[BC]$ , num ponto exterior do paralelepípedo.

Resposta: **Opção A**

Exame Nacional 3.º Ciclo - 2011, 1.ª chamada



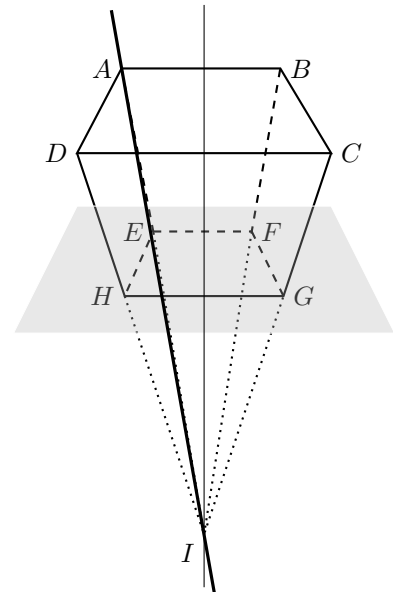
29. A reta  $AI$  não pertence ao plano  $EFG$ , porque, nem o ponto  $A$ , nem o ponto  $I$  pertencem ao plano.

Como o ponto  $E$  pertence à reta  $AI$  e ao plano  $EFG$ , podemos afirmar que a reta não é estritamente paralela ao plano.

A reta perpendicular ao plano  $EFG$  que contém o ponto  $I$  é a altura da pirâmide, pelo que a reta que contém a aresta  $[AI]$  não é perpendicular ao plano.

Assim, podemos afirmar que a reta  $AI$  é concorrente (no ponto  $E$ ) com o plano  $EFG$ , mas não é perpendicular, ou seja é concorrente oblíqua.

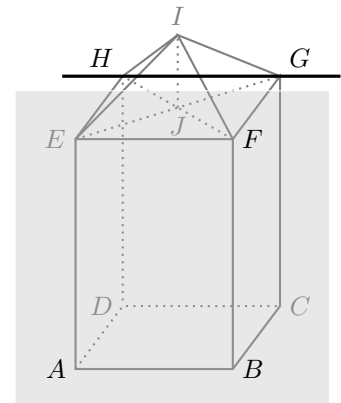
Resposta: **Opção B**



Prova Final 3.º Ciclo – 2010, 2.ª chamada

30. Como o plano  $ABF$  contém uma face do prisma e a reta  $HG$  contém uma aresta da face oposta, e as faces opostas do prisma estão em planos paralelos, então a reta  $HG$  é estritamente paralela ao plano  $ABF$ .

Resposta: **Opção C**

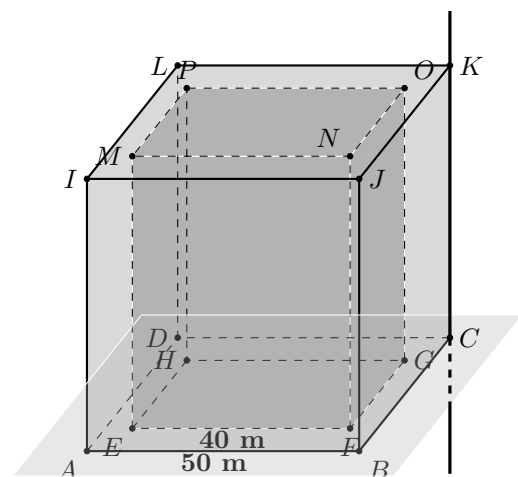


Prova Final 3.º Ciclo – 2010, 1.ª chamada

31. Como o prisma é reto, e o cubo também é um prisma reto, qualquer reta que contenha uma aresta lateral do prisma (ou uma aresta do cubo que não pertença às faces  $[ABCD]$  e  $[IJKL]$ ) é perpendicular ao plano que contém a base da floreira.

Assim, a reta pretendida pode ser, por exemplo,

a reta  $CK$



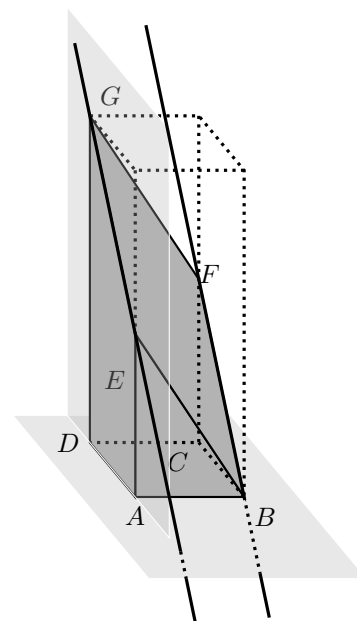
Prova Final 3.º Ciclo – 2009, 2.ª chamada



32. A reta  $EG$  não é paralela nem perpendicular ao plano  $[ABCD]$ , que contém a base do prisma.

A reta  $FB$  como está contida na face do prisma que é paralela à face  $[ADGE]$  é paralela ao plano que contém esta face.

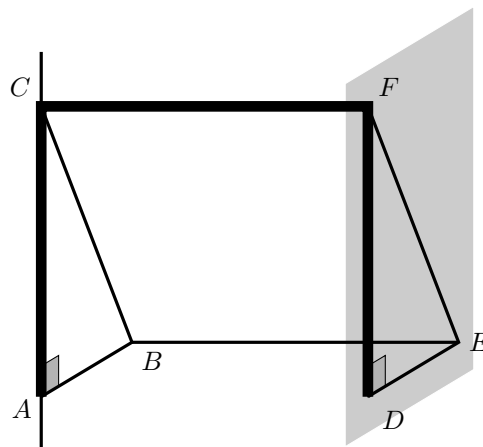
Resposta: **Opção C**



Exame Nacional 3.º Ciclo - 2009, 1.ª chamada

33. Como o poste representado pelo segmento  $[AC]$  é paralelo ao poste representado pelo segmento  $[DF]$ , e este está contido no plano  $DEF$ , então o poste representado pelo segmento  $[AC]$  é estritamente paralelo ao plano  $DEF$

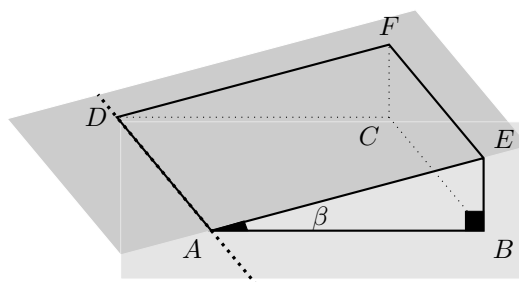
Resposta: **Opção B**



Teste Intermédio 9.º ano - 09.02.2009

34. Como a reta  $AD$  é perpendicular ao plano que contém a face  $[ABE]$  e está contida no plano que contém a face  $[AEFD]$ , então os dois planos são perpendiculares.

Resposta: **Opção A**

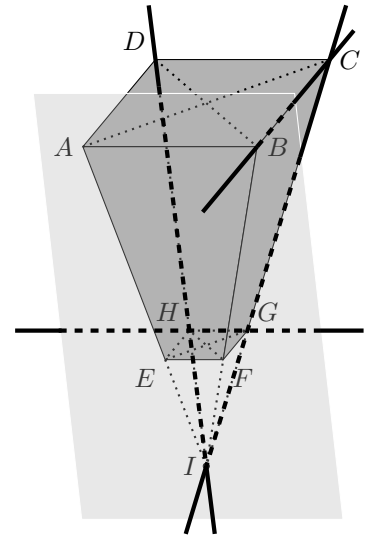


Exame Nacional 3.º Ciclo - 2008, 2.ª chamada



35. Analisando cada uma das afirmações temos que:

- A reta  $DH$  contém o ponto  $I$ , que também pertence ao plano que contém a face  $[ABFE]$ , pelo que a reta intersecta o plano, ou seja, a reta não é paralela ao plano.
- A reta  $CG$  intersecta o plano que contém a face  $[ABFE]$  no ponto  $I$ , segundo um ângulo que não é reto, pelo que é oblíqua ao plano.
- Como as faces laterais de uma pirâmide não são perpendiculares à base da pirâmide, então nenhuma reta contida na base pode ser perpendicular ao plano que contém uma face lateral. Como a reta  $CB$  pertence ao plano da base, então não é perpendicular ao plano que contém a face  $[ABFE]$
- A reta  $HG$  é estritamente paralela à reta  $EF$ , pois ambas contêm lados opostos de um quadrado. Como a reta  $HG$  é estritamente paralela a uma reta do plano que contém a face  $[ABFE]$ , então é paralela ao plano.



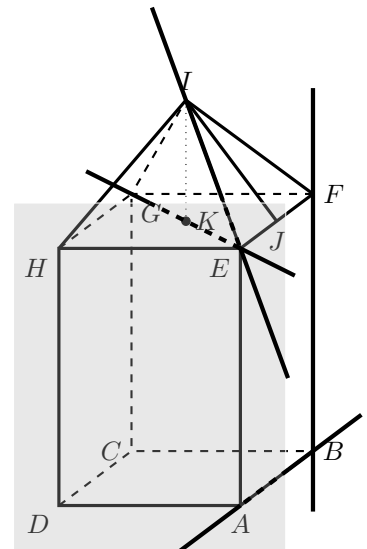
Resposta: **Opção B**

Exame Nacional 3.º Ciclo - 2008, 1.ª chamada

36. Comparando cada uma das retas com o plano  $ADH$ , temos que:

- A reta  $AB$  não é paralela ao plano  $ADH$ , porque se intersectam no ponto  $A$
- A reta  $IE$  não é paralela ao plano  $ADH$ , porque se intersectam no ponto  $E$
- Como a face  $[ABFE]$  é um retângulo, então a reta  $BF$  é paralela à reta  $AE$ , e como a reta  $AE$  pertence ao plano  $ADH$ , então a reta  $BF$  é paralela ao plano  $ADH$
- A reta  $EG$  não é paralela ao plano  $ADH$ , porque se intersectam no ponto  $E$

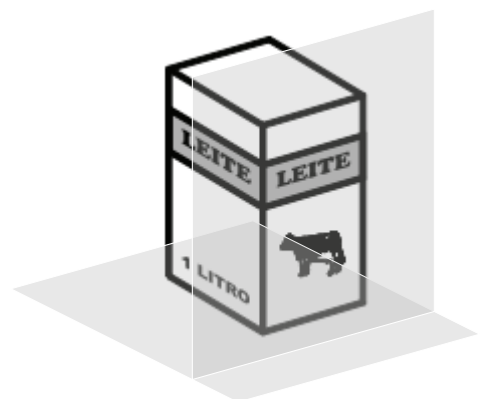
Resposta: **Opção C**



Teste Intermédio 9º ano - 07.05.2008

37. Como o pacote tem a forma de um paralelepípedo retângulo, então as bases são perpendiculares às faces laterais.

Resposta: **Opção D**

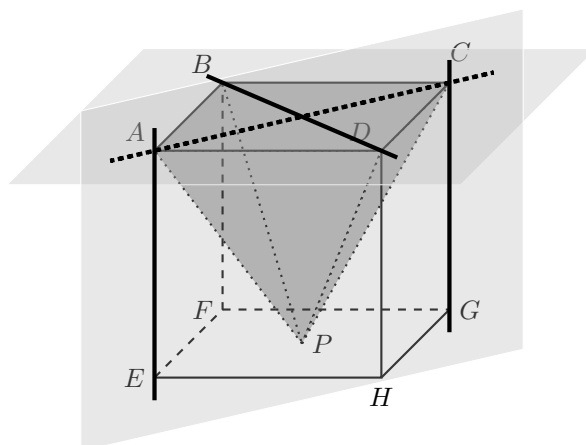


Teste Intermédio 8.º ano - 30.04.2008



38. Podemos considerar dois planos que contêm a reta  $[AC]$ :

- Considerando o plano  $ABC$ , podemos verificar que uma reta perpendicular à reta  $[AC]$  é a reta  $[BD]$  (porque contêm as diagonais de um mesmo quadrado)
- Considerando o plano  $ACG$ , podemos verificar que uma reta perpendicular à reta  $[AC]$  é a reta  $[AE]$  ou a reta  $[CG]$  (porque contêm arestas concorrentes de um quadrado)

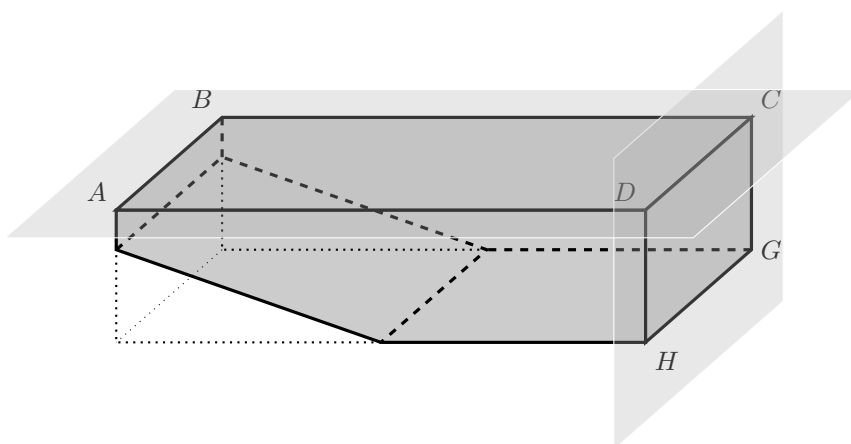


Exame Nacional 3.º Ciclo - 2007, 1.ª chamada

39. Como num paralelepípedo retângulo duas faces que não sejam paralelas têm uma aresta em comum, ou seja, são correntes.





Assim, podemos considerar quaisquer dois planos em que um contenham faces não paralelas do paralelepípedo retângulo, por exemplo, os planos

$ABC$  e  $CDH$



Exame Nacional 3.º Ciclo - 2006, 2.ª Chamada

40. Identificando as posições relativas dos símbolos ,  e , nas planificações apresentadas e nas figuras, podemos verificar que:

- As faces com os símbolos  e , na figura da esquerda, são faces adjacentes, e nas Planificações B e D são faces opostas, pelo que, estas planificações não representam o dado das figuras.
- As faces com os símbolos  e , na figura da direita, são faces adjacentes, e na Planificação C são faces opostas, pelo que, esta planificação não representa o dado das figuras.

Desta forma, de entre as planificações apresentadas, a única que pode representar o dado das figuras é a Planificação A.

Resposta: **Opção A**

Exame Nacional 3.º Ciclo - 2005, 2.ª Chamada

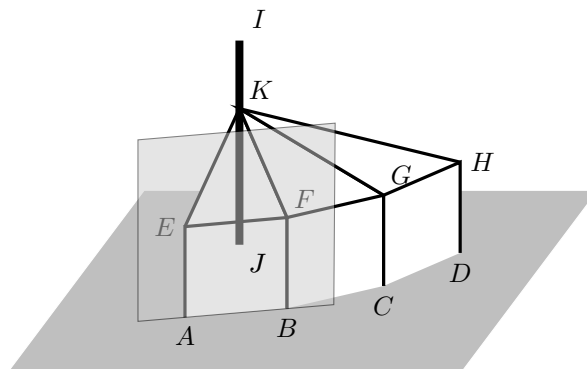


41.

- 41.1. Como os segmentos de reta  $[EA]$  e  $[FB]$  são perpendiculares ao chão, e pertencem ao plano  $ABF$ , então este plano é perpendicular ao chão.

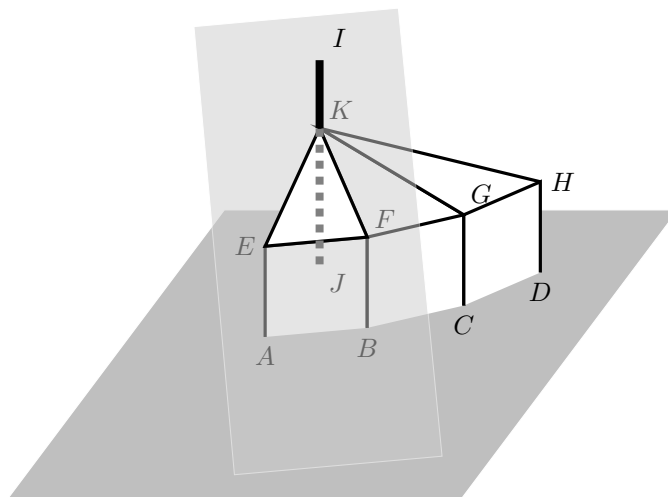
Assim, qualquer reta perpendicular ao chão é paralela ao plano  $ABF$ , como por exemplo:

a reta  $IJ$



- 41.2. Um plano que intersecte o plano do chão e uma reta perpendicular ao chão num único ponto, não é perpendicular ao plano do chão. Como a reta  $JK$  é perpendicular ao chão, um plano com estas características, é, por exemplo:

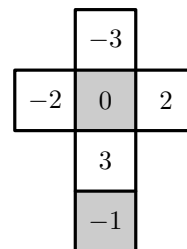
o plano  $EFK$



Exame Nacional 3.º Ciclo – 2005, 1.ª Chamada

42. Observando a planificação podemos verificar que as faces com os números  $-3$ ,  $-2$ ,  $3$  e  $2$  são adjacentes à face com o número  $0$  porque têm uma aresta em comum com esta face.

Desta forma, o número que se encontra na face oposta ao do  $0$  (zero) é o número  $-1$



Prova de Aferição – 2004

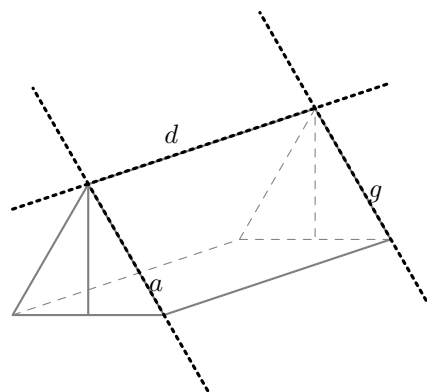
43.

- 43.1. Como as faces laterais de um prisma são retângulos, quaisquer duas arestas opostas de uma face lateral são paralelas, tal como os ferros correspondentes, ou seja, por exemplo, os ferros:

$a$  e  $g$

- 43.2. De forma análoga, quaisquer duas arestas concorrentes de uma face lateral são perpendiculares, tal como os ferros correspondentes, ou seja, por exemplo, os ferros:

$a$  e  $d$



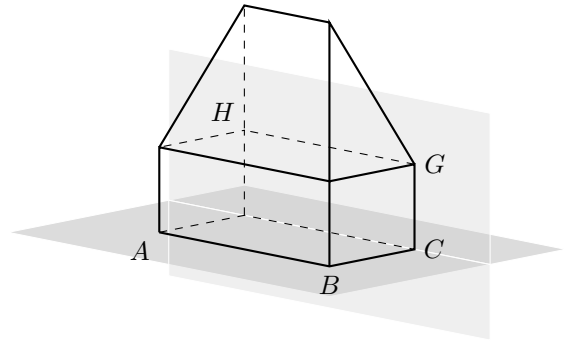
Prova de Aferição – 2003



44. Como  $[ABCDEFGH]$  é um prisma quadrangular reto, quaisquer duas faces adjacentes pertencem, respectivamente a dois planos perpendiculares.

Assim, o plano que contém o chão da casa, ou seja o plano  $ABC$  é perpendicular, por exemplo ao

plano  $CGH$



Prova de Aferição – 2002

