

M.A.C.S. (10.º ano)

Teoria da partilha (divisão justa)

Exercícios de Provas Nacionais - Propostas de resolução



1. Como a Elsa valoriza três vezes mais o bilhete B2 do que qualquer um dos outros bilhetes, e todos os outros bilhetes valorizados da mesma forma, podemos dividir a valorização da Elsa em 8 partes, da seguinte forma:

Bilhetes	B1	B2	B3	B4	B5	B6
Valorização da Elsa	1	3	1	1	1	1

Assim, 50% da valorização global dos bilhetes, da Elsa, é de $\frac{8}{2} = 4$ partes. Desta forma, analisando cada uma das opções apresentadas, temos:

Bilhetes	B1	B2	B3	B4	B5	B6	Total
Valorização da Elsa	1	3	1	1	1	1	8
Opção A	1			1		1	3
Opção B		3	1		1		5
Opção C	1		1		1	1	4
Opção D		3	1		1	1	6

Resposta: **Opção C**

2. Procedendo à distribuição dos bens, aplicando o método descrito, temos:

	Elsa	Gaspar
F	19	35
M	26	5
T	55	60
Atribuição temporária	M	F+T
Total temporário	26	$35 + 60 = 95$
Designação	B	A
Bem usado no ajuste	T	
Total final	$26 + \frac{x}{100} \times 55$	$95 - \frac{x}{100} \times 60$

Igualando os dois totais finais e revolvendo a equação que traduz a partilha equilibrada, vem:

$$26 + \frac{x}{100} \times 55 = 95 - \frac{x}{100} \times 60 \Leftrightarrow 26 + \frac{x \times 55}{100} = 95 - \frac{x \times 60}{100} \Leftrightarrow 26 + 0,55x = 95 - 0,6x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,55x + 0,6x = 95 - 26 \Leftrightarrow 1,15x = 69 \Leftrightarrow x = \frac{69}{1,15} \Leftrightarrow x = 60$$

Assim, a partilha final dos bens pelos dois amigos é:

- A Elsa recebe a mesa de campismo e mais 60% do tempo de utilização da tenda.
- O Gaspar recebe o fogão de campismo e 40% do tempo de utilização da tenda.

Assim, num ano com 365 dias, o tempo de utilização da tenda destinado ao Gaspar é de $365 \times 0,4 = 146$ dias.

Desta forma, no ano em causa, o Gaspar já tinha usado a tenda na totalidade do tempo que lhe era destinado, pelo que não terá direito a usá-la no festival referido.

Exame – 2020, 1.ª Fase



3. De acordo com o método descrito, e com os dados do enunciado, temos que:

Sócios	A	B	C
Valor Global atribuído	$150 + 211 + 158 = 519$	$249 + 252 + 120 = 621$	$200 + 258 + 145 = 603$
Valor considerado justo	$\frac{519}{3} = 173$	$\frac{621}{3} = 207$	$\frac{603}{3} = 201$
Atribuição do espaço	E3	E1	E2
Valor provisório do aluguer	158	249	258
Excedente (E)	—	$249 - 207 = 42$	$258 - 201 = 57$
Défice (D)	$173 - 158 = 15$	—	—
E - D	$42 + 57 - 15 = 99 - 15 = 84$		
Parte a descontar no valor considerado justo	$\frac{84}{3} = 28$		
Valor final	$173 - 28 = 145$	$207 - 28 = 179$	$201 - 28 = 173$

Assim, temos que a atribuição dos espaços e o respetivo valor a pagar é:

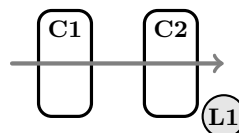
- Sócio A - deve pagar 145 € pelo espaço E3
- Sócio B - deve pagar 179 € pelo espaço E1
- Sócio C - deve pagar 173 € pelo espaço E2

Exame – 2019, 2.^a Fase

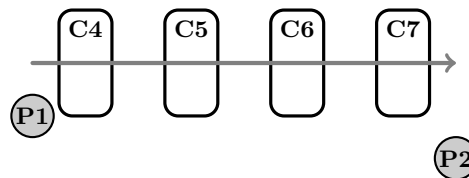


4. Aplicando o método descrito, de acordo com a posição dos marcadores, temos que:

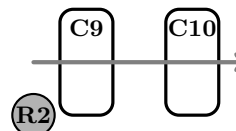
- Percorrendo a linha de caixas, partindo da caixa mais à esquerda, até se encontrar o primeiro marcador, observamos que a Laura, que colocou esse marcador, fica responsável por todas as caixas à esquerda do mesmo.



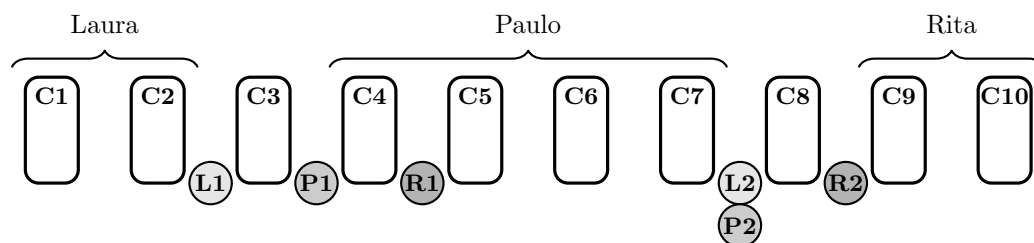
- Percorrendo a linha de caixas, novamente da esquerda para a direita, até se encontrar o segundo marcador de um dos outros dois amigos, observamos que o Paulo colocou esse marcador, pelo que fica responsável pelas caixas compreendidas entre os seus primeiro e segundo marcadores.



- O amigo que resta, ou seja, a Rita fica responsável por todas as caixas situadas à direita do seu segundo marcador.



- As caixas C3 e C8 serão distribuídas por sorteio.



Assim, a distribuição das caixas pelos amigos, aplicando o método descrito, é:

- A Laura fica responsável pelas caixas C1 e C2.
- O Paulo fica responsável pelas caixas C4, C5, C6 e C7.
- A Rita fica responsável pelas caixas C9 e C10.
- As caixas C3 e C8 serão distribuídas por sorteio.



5. Aplicando o método descrito, vem:

Bem	Presidente da Junta de Freguesia		
	A	B	C
E	224	182	226
M	2050	2000	1800
T	4950	5003	6005
Valor global	7224	7185	8031
Valor considerado justo	2408	2395	2677
Atribuição de bens	M	—	E+T
Valor monetário recebido	2050	0	6231
Excedente disponibilizado	—	—	3554
Valor em falta recebido	358	2395	—
Montante disponibilizado em excesso	801		
Divisão final	267	267	267

Assim, a distribuição final é:

- Presidente da Junta de Freguesia A:
Recebe o motocultivador e $358 + 267 = 625$ euros
- Presidente da Junta de Freguesia B:
Recebe $2395 + 267 = 2662$ euros
- Presidente da Junta de Freguesia C:
Recebe a enfardadeira e o trator e paga $3554 - 267 = 3287$ euros

Exame – 2018, Ép. especial



6. Procedendo à partilha dos presentes, aplicando o método descrito, temos:

	Mary	Paul
C	33	56
D	20	24
P	47	20
Afetação temporária	P	C+D
Total temporário	47	$56 + 24 = 80$
Designação	B	A
Presente usado no ajuste	D	
Total final	$47 + \frac{x}{100} \times 20$	$80 - \frac{x}{100} \times 24$

Igualando os dois totais finais e revolvendo a equação que traduz o equilíbrio, vem:

$$47 + \frac{x}{100} \times 20 = 80 - \frac{x}{100} \times 24 \Leftrightarrow 47 + \frac{x \times 20}{100} = 80 - \frac{x \times 24}{100} \Leftrightarrow 47 + 0,2x = 80 - 0,24x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,2x + 0,24x = 80 - 47 \Leftrightarrow 0,44x = 33 \Leftrightarrow x = \frac{33}{0,44} \Leftrightarrow x = 75$$

Assim, a partilha final dos presentes é:

- A guia Mary recebe a bandeira de Portugal e 75% da embalagem de doces.
- O guia Paul recebe o CD de fado e 25% da embalagem de doces.

Exame – 2018, 1.ª Fase



7. Fazendo a distribuição do prémio pelo três projetos, segundo o algoritmo apresentado, temos:

Bens \ Projetos	J	C	T
Computador	350	400	304
Impressora	400	380	168
Máquina Fotográfica	201	252	302
Valor global	951	1032	774
Valor considerado justo	317	344	258
Atribuição de bens	Impressora	Computador	Máq. Fotográfica
Valor monetário recebido	400	400	302
Excedente pago	83	56	44
Dinheiro sobranete	$83 + 56 + 44 = 183$		
Divisão final	61	61	61

Assim, a distribuição final do prémio pelos três projetos é:

- O Jornal da Escola recebe a Impressora e paga $83 - 61 = 22$ euros
- O Clube da Ciência recebe o Computador e ainda $61 - 56 = 5$ euros
- o Clube de Teatro recebe a Máquina Fotográfica e ainda $61 - 44 = 17$ euros

Exame – 2017, 2.ª Fase



8. Procedendo à partilha dos prémios, aplicando o método descrito, temos:

Elementos da equipa	Constança	Deodato
Prémios		
Carro	30	50
Estada	60	35
<i>Scooter</i>	10	15
Atribuição temporária	Estada	Carro + <i>Scooter</i>
Total temporário	60	50 + 15 = 65
Designação	B	A
Prémio usado no ajuste	<i>Scooter</i>	
Total final	$60 + \frac{x}{100} \times 10$	$65 - \frac{x}{100} \times 15$

Igualando os dois totais finais e revolvendo a equação que traduz o equilíbrio, vem:

$$60 + \frac{x}{100} \times 10 = 65 - \frac{x}{100} \times 15 \Leftrightarrow 60 + \frac{x \times 10}{100} = 65 - \frac{x \times 15}{100} \Leftrightarrow 60 + 0,1x = 65 - 0,15x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,1x + 0,15x = 65 - 60 \Leftrightarrow 0,25x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{0,25} \Leftrightarrow x = 20$$

Desta forma, o número total de pontos do Deodato é a soma dos pontos atribuídos ao carro e 20% dos pontos atribuídos à *scooter*, ou seja: $50 + 15 \times 0,2 = 50 + 3 = 53$

De forma correspondente, a Constança ficará com um total de pontos correspondente à soma dos pontos atribuídos à estada e 80% dos pontos atribuídos à *scooter*, ou seja: $60 + 10 \times 0,8 = 60 + 8 = 68$

Ou seja, os dois elementos da equipa ficam ambos com o mesmo número de pontos e a partilha final dos prémios é:

- A Constança recebe estada e 20% da *scooter*.
- O Deodato recebe carro e 80% da *scooter*.

Exame – 2016, Ép. especial



9. Aplicando o método descrito para determinar como serão distribuídos os tipos de lugares que cada agência pode vender, temos:

Agência Tipo de lugar	Ago	Behind	Extra-legroom	Normal	Up-front	XL
<i>NETVOA (NV)</i>	22	26	6	33	8	5
<i>VOARSEMPRE (VS)</i>	18	21	1	55	1	4
Atribuição temporária	NV	NV	NV	VS	NV	NV
Soma temporária	NV: $22+26+6+8+5=67$ pts VS: 55 pts					
Agência com mais pontos	NETVOA (NV)					
Quocientes	$\frac{22}{18} \approx 1,22$	$\frac{26}{21} \approx 1,24$	$\frac{6}{1} = 6$	—	$\frac{8}{1} = 8$	$\frac{5}{4} = 1,25$
Segunda atribuição	VS	NV	NV	VS	NV	NV
Segunda soma	NV: $26+6+8+5=45$ pts VS: $18+55=73$ pts					
Soma com a transferência de $x\%$ de lugares AGO	NV: $67 - \frac{x}{100} \times 22$ pts VS: $55 + \frac{x}{100} \times 18$ pts					

Igualando as duas somas e revolvendo a equação que traduz o equilíbrio, vem:

$$67 - \frac{x}{100} \times 22 = 55 + \frac{x}{100} \times 18 \Leftrightarrow 67 - \frac{x \times 22}{100} = 55 + \frac{x \times 18}{100} \Leftrightarrow 67 - 0,22x = 55 + 0,18x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 67 - 55 = 0,18x + 0,22x \Leftrightarrow 12 = 0,4x \Leftrightarrow \frac{12}{0,4} = x \Leftrightarrow x = 30$$

Ou seja, devem ser transferidos 30% dos lugares *Ago* da agência NETVOA para a agência VOARSEMPRE, pelo que os lugares que cada agência pode vender são:

- NETVOA: 70% dos lugares do tipo *Ago* e todos os lugares dos tipos *Behind*, *Extra-legroom*, *Up-front* e *XL*.
- VOARSEMPRE: 30% dos lugares do tipo *Ago* e todos os lugares do tipo *Normal*.

Exame – 2015, Ép. especial



10. Procedendo à partilha dos bens, aplicando o método descrito, temos:

Bens \ Sócios	David	Tomás
	Frota de motos	20
Frota de automóveis	45	25
Avião	35	50
Partilha temporária	Automóveis	Motos+Avião
Total temporário	45	$25 + 50 = 75$
Designação	B	A
Bem usado no ajuste	Frota de motos	
Total final	$45 + \frac{x}{100} \times 20$	$75 - \frac{x}{100} \times 25$

Igualando os dois totais finais e revolvendo a equação que traduz o equilíbrio, vem:

$$45 + \frac{x}{100} \times 20 = 75 - \frac{x}{100} \times 25 \Leftrightarrow 45 + \frac{x \times 20}{100} = 75 - \frac{x \times 25}{100} \Leftrightarrow 45 + 0,2x = 75 - 0,25x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,2x + 0,25x = 75 - 45 \Leftrightarrow 0,45x = 30 \Leftrightarrow x = \frac{30}{0,45} \Rightarrow x \approx 66,67$$

Desta forma, o número total de pontos do David é a soma dos pontos atribuídos à frota de automóveis e 66,67% dos pontos atribuídos à frota de motos, ou seja: $45 + 20 \times 0,6667 \approx 58,34$

De forma correspondente, o Tomás ficará com um total de pontos correspondente à soma dos pontos atribuídos ao avião e 33,33% dos pontos atribuídos à frota de motos, ou seja: $50 + 25 \times 0,3333 \approx 58,33$

Ou seja, os dois sócios ficam ambos com o mesmo número de pontos e a partilha final dos prémios é:

- O Diogo recebe a frota de automóveis e 66,67% da frota de motos.
- O Tomás recebe o avião e 33,33% da frota de motos.

Exame – 2015, 2.ª Fase



11. Distribuindo o prémio por cada um dos funcionários, de acordo com o método descrito, temos:

Funcionários	Alice	Bernardo	Camila
Bens			
Computador	600	950	750
<i>Tablet</i>	350	300	300
Viagem	850	1000	810
Valor global	1800	2250	1860
Valor considerado justo	600	750	620
Atribuição de bens	<i>Tablet</i>	Computador+Viagem	—
Valor monetário recebido	350	$950 + 1000 = 1950$	0
Excedente pago	—	1200	—
Valor em falta	$600 - 350 = 250$	—	620
Dinheiro sobrante	$1200 - 250 - 620 = 330$		
Divisão final	110	110	110

Assim, a distribuição final do prémio pelos três funcionários é:

- A Alice recebe o *tablet* e ainda $250 + 110 = 360$ euros
- O Bernardo recebe o computador e a viagem e paga $1200 - 110 = 1090$ euros
- A Camila recebe $620 + 110 = 730$ euros

Exame – 2015, 1.^a Fase



12. Determinando a partilha dos dois bens, e o valor a receber ou a pagar por cada lista, aplicando o método descrito, temos:

Lista	A	B	C	D
Automóvel	10 000	15 000	12 500	12 000
Computador	1500	500	2000	2500
Valor global	11 500	15 500	14 500	14 500
Número de votos	1232	1035	613	555
Total de votos	$1232 + 1035 + 613 + 555 = 3435$			
Percentagem de votos	$\frac{1232}{3435} \times 100 \approx 36$	$\frac{1035}{3435} \times 100 \approx 30$	$\frac{613}{3435} \times 100 \approx 18$	$\frac{555}{3435} \times 100 \approx 16$
Porção justa	$11\,500 \times \frac{36}{100} = 4140$	$15\,500 \times \frac{30}{100} = 4650$	$14\,500 \times \frac{18}{100} = 2610$	$14\,500 \times \frac{16}{100} = 2320$
Atribuição de bens	—	Automóvel	—	Computador
Valor dos bens recebidos	0	15 000	0	2500
Valor a pagar	—	$15\,000 - 4650 = 10\,350$	—	$2500 - 2320 = 180$
Valor a receber	4140	—	2610	—
Valor em excesso	$10\,350 + 180 - 4140 - 2610 = 3780$			
Distribuição do excesso	$3780 \times \frac{36}{100} = 1360,8$	$3780 \times \frac{30}{100} = 1134$	$3780 \times \frac{18}{100} = 680,4$	$3780 \times \frac{16}{100} = 604,8$

Assim, a partilha dos dois bens, e o valor a receber ou a pagar por cada lista, é:

- Lista A: Recebe $4140 + 1360,8 = 5500,8$ euros
- Lista B: Recebe o automóvel e paga $10\,350 - 1134 = 9216$ euros
- Lista C: Recebe $2610 + 680,4 = 3290,4$ euros
- Lista D: Recebe o computador e ainda $604,8 - 180 = 424,8$ euros

Exame – 2013, 2.ª Fase



13. Determinando a partilha dos três bens, aplicando o método descrito, temos:

	Manuel	José	Paulo
Máquina fotográfica	€140	€120	€180
Televisor	€800	€700	€600
Consola de jogos	€580	€700	€500
Valor global (€)	1520	1520	1280
Porção justa (€)	$1520 \times \frac{40}{100} = 608$	$1520 \times \frac{30}{100} = 456$	$1280 \times \frac{30}{100} = 384$
Atribuição de bens	Televisor	Consola de jogos	Máq. fotográfica
Valor dos bens recebidos (€)	800	700	180
Valor a pagar (€)	$800 - 608 = 192$	$700 - 456 = 244$	—
Valor a receber (€)	—	—	$384 - 180 = 204$
Valor em excesso (€)	$192 + 244 - 204 = 232$		
Distribuição do excesso (€)	$232 \times \frac{40}{100} = 92,8$	$232 \times \frac{30}{100} = 69,6$	$232 \times \frac{30}{100} = 69,6$

Assim, a partilha dos três bens, e o valor a receber ou a pagar por cada jovem, é:

- Manuel: Recebe o televisor e paga $192 - 92,8 = 99,2$ euros
- José: Recebe a consola de jogos e paga $244 - 69,6 = 174,4$ euros
- Paulo: Recebe a máquina fotográfica e ainda $204 + 69,6 = 273,6$ euros

Exame – 2011, 2.^a Fase



14. Determinando a partilha dos três bens, aplicando o método descrito, temos:

	ANA	BERTA	CARLA	DANIELA
Automóvel	€15 000	€18 000	€15 600	€16 500
Terreno	€33 000	€20 000	€27 000	€30 000
Casa	€117 000	€150 000	€120 000	€180 000
Valor global (€)	165 000	188 000	162 600	226 500
Porção justa (€)	41 250	47 000	40 650	56 625
Atribuição de bens	Terreno	Automóvel	—	Casa
Valor bens recebidos (€)	33 000	18 000	0	180 000
Valor a pagar (€)	—	—	—	$180\,000 - 56\,625 = 123\,375$
Valor a receber (€)	$41\,250 - 33\,000 = 8\,250$	$47\,000 - 18\,000 = 29\,000$	40 650	—
Valor em excesso (€)	$123\,375 - 8\,250 - 29\,000 - 40\,650 = 45\,475$			
Distribuição do excesso (€)	$\frac{45\,475}{4} = 11\,368,75$	$\frac{45\,475}{4} = 11\,368,75$	$\frac{45\,475}{4} = 11\,368,75$	$\frac{45\,475}{4} = 11\,368,75$

Assim, a partilha dos três bens, e o valor a receber ou a pagar por cada herdeira, é:

- Ana: Recebe o terreno e ainda $8\,250 + 11\,368,75 = 19\,618,75$ euros
- Berta: Recebe o automóvel e ainda $29\,000 + 11\,368,75 = 40\,368,75$ euros
- Carla: Recebe $40\,650 + 11\,368,75 = 52\,018,75$ euros
- Berta: Recebe a casa e paga $123\,375 - 11\,368,75 = 112\,006,75$ euros

Exame – 2010, 1.ª Fase

15. Determinando o valor, em euros, recebido por cada uma das modalidades, temos:

	Modalidade desportiva					TOTAL
	Basquetebol	Futebol	Ténis	Golfe	Râguebi	
N.º praticantes	186	218	91	45	191	731
Fração destinada a cada modalidade	$\frac{186}{731}$	$\frac{218}{731}$	$\frac{91}{731}$	$\frac{45}{731}$	$\frac{191}{731}$	—

Assim, a quantia que foi atribuída a cada modalidade, é:

- Basquetebol: $\frac{186}{731} \times 10\,965 = 2\,790$ euros
- Futebol: $\frac{218}{731} \times 10\,965 = 3\,270$ euros
- Ténis: $\frac{91}{731} \times 10\,965 = 1\,365$ euros
- Golfe: $\frac{45}{731} \times 10\,965 = 675$ euros
- Râguebi: $\frac{191}{731} \times 10\,965 = 2\,865$ euros

Exame – 2009, 2.ª Fase



16.

16.1. O valor da herança para cada um dos herdeiros e o valor que cada um deles considera justo receber, é:

Herdeiros \ Bens	Pedro	Rita	Sofia
Apartamento	€200 000	€210 000	€190 000
Terreno	€100 000	€90 000	€80 000
Valor da herança (€)	$200\,000 + 100\,000 = 300\,000$	$210\,000 + 90\,000 = 300\,000$	$190\,000 + 80\,000 = 270\,000$
Valor considerado justo (€)	$\frac{300\,000}{3} = 100\,000$	$\frac{300\,000}{3} = 100\,000$	$\frac{270\,000}{3} = 90\,000$

16.2. Determinando a forma como ficou distribuída a herança pelos três irmãos, temos:

Herdeiros \ Bens	Pedro	Rita	Sofia
Atribuição dos bens	Terreno	Apartamento	—
Valor dos bens recebidos (€)	100 000	210 000	0
Valor a pagar (€)	—	$210\,000 - 100\,000 = 110\,000$	—
Valor a receber (€)	—	—	90 000
Dinheiro sobranete (€)	$110\,000 - 90\,000 = 20\,000$		
Distribuição do dinheiro (€)	$\frac{20\,000}{3} \approx 6666,67$	$\frac{20\,000}{3} \approx 6666,67$	$\frac{20\,000}{3} \approx 6666,67$

Assim, a partilha dos bens, e o valor a receber ou a pagar por cada herdeiro, é:

- Pedro: Recebe o terreno e ainda 6666,67 euros
- Rita: Recebe o apartamento e paga $110\,000 - 6666,67 = 103\,333,33$ euros
- Sofia: Recebe $90\,000 + 6666,67 = 96\,666,67$ euros

Comparando o valor da herança que cada um dos herdeiros considerava justo receber e o que efetivamente recebeu, temos:

Herdeiros \ Bens	Pedro	Rita	Sofia
Valor considerado justo (€)	100 000	100 000	90 000
Valor recebido (€)	$100\,000 + 6666,67 = 106\,666,67$	$210\,000 - 103\,333,33 = 106\,666,67$	96 666,67

Desta forma verificamos que todos os os herdeiros receberam mais do que consideraram justo receber, o que significa que nenhum deles tem razão para reclamar do resultado final da divisão.

Exame – 2008, 1.ª Fase

