Matemática Aplicada às Ciências Sociais - 10º Ano
Teoria de Eleições
Propostas de resolução

Exercícios de exames

1.

1.1. Como a escolha do país a visitar é feita considerando apenas a primeira preferência, temos que as votações foram:

- Bélgica: $X + 7$ votos
- Croácia: 15 votos
- Dinamarca: 12 votos

Como o segundo país mais votado para a visita de estudo era a Bélgica, temos que a votação da Bélgica deve ser maior que a da Dinamarca (12) e menor que a da Croácia (15). Assim, de entre as opções apresentadas, o único valor possível para o valor de X é 7, porque a soma correspondente, $7 + 7 = 14$, está compreendida entre 12 e 15 (e os restantes valores resultam numa soma superior a 15 ou inferior a 12).

Resposta: **Opção B**

1.2. Considerando que $X = 9$, e aplicando o método descrito, temos:

- Total de votos: $9 + 15 + 12 + 7 = 43$
- Número de votos necessário para obter maioria absoluta: 22 (porque $\frac{43}{2} = 21{,}5$)
- Fazendo a contagem do número de votos em cada país, como primeira preferência, verifica-se que nenhum deles obtém a maioria absoluta:
  - Bélgica: $9 + 7 = 16$
  - Croácia: 15
  - Dinamarca: 12
- Reestruturando a tabela, de acordo com o método descrito, ou seja, eliminando o país que obteve o menor número de votos, como primeira preferência - a Dinamarca - temos:

Nº. de votos / Preferência	9	15	12	7
1ª	Bélgica	Croácia	Croácia	Bélgica
2ª	Croácia	Bélgica	Bélgica	Croácia

E assim, o país escolhido pelos alunos, ou seja o país com maioria absoluta de votos ($15 + 12 = 27$, ou seja, mais que 22), como primeira preferência é a Croácia.

Exame – 2018, 1ª Fase

2. Aplicando o método descrito aos 600 votos registados na tabela, temos:

- Pontuação do filme A (195 votos na 1.ª preferência, 180 votos na 3.ª preferência e 225 votos na 4.ª preferência:
$$4 \times 195 + 2 \times 180 + 1 \times 225 = 1365$$
- Pontuação do filme B (180 votos na 2.ª preferência e $225 + 195 = 420$ votos na 3.ª preferência:
$$3 \times 180 + 2 \times 420 = 1380$$
- Pontuação do filme C (180 votos na 1.ª preferência, 225 votos na 2.ª preferência e 195 votos na 4.ª preferência:
$$4 \times 180 + 3 \times 225 + 1 \times 195 = 1590$$
- Pontuação do filme D (225 votos na 1.ª preferência, 195 votos na 2.ª preferência e 195 votos na 4.ª preferência:
$$4 \times 225 + 1 \times 180 + 3 \times 195 = 1665$$

Como após a contabilização dos 750 votos, os filmes A e D tiveram a mesma pontuação e a diferença de pontos, após a contabilização dos 600 votos, é de:
$$1665 - 1365 = 300$$

Então podemos concluir que o filme A foi classificado pelos 150 votantes em falta 2 preferências acima do filme D (porque $2 \times 150 = 300$), ou seja o filme A foi classificado na 1.ª preferência e o filme D na 3.ª, ou então o filme A foi classificado na 2.ª preferência e o filme D na 4.ª.

Por outro lado como o filme B obteve a maior pontuação, e a diferença de pontos para o filme A, após a contabilização dos 600 votos, é de:
$$1380 - 1365 = 15$$

Se o filme A fosse classificado na 1.ª preferência para os 150 votantes em falta, seria o filme com maior pontuação, pelo que podemos concluir que o filme B foi o classificado na 1.ª preferência para os 150 votantes em falta.

Desta forma, temos que a ordenação dos 150 votantes em falta foi:

Filme	A	B	C	D
Preferência	2.ª	1.ª	3.ª	4.ª

E desta forma, aplicando o método descrito aos 750 votos, ou seja às pontuações calculadas anteriormente somamos a pontuação decorrente dos 150 votos falta, e assim, temos:

- Pontuação do filme A: $1365 + 3 \times 150 = 1815$
- Pontuação do filme B: $1380 + 4 \times 150 = 1980$
- Pontuação do filme C: $1590 + 2 \times 150 = 1890$
- Pontuação do filme D: $1665 + 1 \times 150 = 1815$

Exame – 2017, Ép. especial

3. Temos que:

- O número total de votos validamente expressos é: $373 + 602 + 318 + 157 = 1450$
- O número total de votos necessários para obter a maioria absoluta é: $\frac{1450}{2} + 1 = 726$

Assim podemos verificar que a lista X, em coligação com qualquer outra lista obteria a maioria absoluta. Desta forma a coligação X com Z obteria uma votação de $602 + 157 = 759$, e portanto mais do que os 726 votos necessários para a maioria absoluta.

Resposta: **Opção B**

Exame – 2017, 2ª Fase

4. Aplicando o método descrito para determinar qual foi a ementa vencedora, começando por selecionar as ementas A e B, temos:

	N.º de votos	N.º de votos	Vencedor
Ementas A e B	Ementa A 309	Ementa B $602 + 727 = 1329$	Ementa B
Ementas B e C	Ementa B $309 + 727 = 1036$	Ementa C 602	Ementa B
Ementas B e D	Ementa B $602 + 309 = 911$	Ementa D 726	Ementa B

Como a ementa B venceu em todas as comparações com as restantes é a ementa vencedora.

Exame – 2017, 1ª Fase

5. Aplicando o primeiro método para o apuramento do vencedor, temos:

	Nº. de votos	**615**	**300**	**435**	**150**	Total de votos	Vencedor
Par V-A	1.ª preferência	A	V	V	V	V: $300 + 435 + 150 = 885$	V
	2.ª preferência	V	A	A	A	A: 615	
Par V-P	1.ª preferência	P	V	V	V	V: $300 + 435 + 150 = 885$	V
	2.ª preferência	V	P	P	P	P: 615	
Par V-R	1.ª preferência	V	V	R	R	V: $615 + 300 = 915$	V
	2.ª preferência	R	R	V	V	R: $435 + 150 = 585$	

Como o ator V (Vasco Silva) venceu na comparação com todos os restantes é o ator vencedor.

Aplicando o primeiro método para o apuramento do vencedor, temos:

- Pontuação do ator A: $3 \times 615 + 2 \times 300 + 2 \times 435 + 1 \times 150 = 3465$
- Pontuação do ator P: $4 \times 615 + 1 \times 300 + 1 \times 435 + 2 \times 150 = 3495$
- Pontuação do ator R: $1 \times 615 + 3 \times 300 + 4 \times 435 + 4 \times 150 = 3855$
- Pontuação do ator V: $2 \times 615 + 4 \times 300 + 3 \times 435 + 3 \times 150 = 4185$

Como o ator V (Vasco Silva) é o que tem maior número de pontos, também é o vencedor decorrente da aplicação deste método.

Exame – 2016, Ép. especial

6. Temos que o número total de votos necessários para obter a maioria absoluta é 24, porque $\frac{47}{2} = 23{,}5$

   Aplicando o método descrito, temos que o número de primeiras preferências de cada candidato é:

   - Candidato E: 7 votos
   - Candidato F: $11 + 6 = 17$ votos
   - Candidato G: 14 votos
   - Candidato H: 9 votos

   Como nenhum dos candidatos obteve a maioria absoluta, e o candidato menos votado é o candidato E, a tabela reestruturada é a seguinte:

Nº. de votos / **Preferência**	**11**	**14**	**7**	**6**	**9**
1ª	F	G	H	F	H
2ª	G	H	F	H	G
3ª	H	F	G	G	F

   Voltando a calcular o número de primeiras preferências de cada candidato, temos:

   - Candidato F: $11 + 6 = 17$ votos
   - Candidato G: 14 votos
   - Candidato H: $7 + 9 = 16$ votos

   Como nenhum dos candidatos obteve a maioria absoluta, e o candidato menos votado é o candidato G, a tabela reestruturada é a seguinte:

Nº. de votos / **Preferência**	**11**	**14**	**7**	**6**	**9**
1ª	F	H	H	F	H
2ª	H	F	F	H	F

   Voltando a calcular o número de primeiras preferências de cada candidato, temos:

   - Candidato F: $11 + 6 = 17$ votos
   - Candidato H: $14 + 7 + 9 = 30$ votos

   Como o candidato H (Henrique) tem a maioria absoluta das primeiras preferências é o candidato eleito para ser o porta-estandarte.

   Analisando a primeira contagem de votos na primeira preferência, podemos verificar que o candidato declarado vencedor, por aplicação do método descrito (H), não foi o que teve maior número de votos na primeira preferência (F).

Exame – 2016, 2ª Fase

7. Aplicando o método descrito para os 900 votos conhecidos, temos:

- Pontuação da banda A: $4 \times 200 + 3 \times 400 + 1 \times 300 = 2300$
- Pontuação da banda B: $3 \times 200 + 4 \times 400 + 2 \times 300 = 2800$
- Pontuação da banda C: $2 \times 200 + 2 \times 400 + 4 \times 300 = 2400$
- Pontuação da banda D: $1 \times 200 + 1 \times 400 + 3 \times 300 = 1500$

Desta forma temos que a banda C não poderá atuar em primeiro lugar porque, mesmo na eventualidade dos 100 votos em falta escolherem a lista C na 1.ª preferência e a lista B na 4.ª preferência, a lista B obteria a maioria dos votos:

- Pontuação da banda B: $2800 + 1 \times 100 = 2900$
- Pontuação da banda C: $2400 + 4 \times 100 = 2800$

E em qualquer outro cenário a pontuação da banda B seria superior, ou a pontação da banda C seria inferior.

Analisando os diferentes cenários, podemos calcular as diferentes pontuações finais de cada banda:

Preferência \ **Banda**	**A**	**B**	**C**	**D**
1ª	$2300 + 4 \times 100 = 2700$	$2800 + 4 \times 100 = 3200$	$2400 + 4 \times 100 = 2800$	$1500 + 4 \times 100 = 1900$
2ª	$2300 + 3 \times 100 = 2600$	$2800 + 3 \times 100 = 3100$	$2400 + 3 \times 100 = 2700$	$1500 + 3 \times 100 = 1800$
3ª	$2300 + 2 \times 100 = 2500$	$2800 + 2 \times 100 = 3000$	$2400 + 2 \times 100 = 2600$	$1500 + 2 \times 100 = 1700$
4ª	$2300 + 1 \times 100 = 2400$	$2800 + 1 \times 100 = 2900$	$2400 + 1 \times 100 = 2500$	$1500 + 1 \times 100 = 1600$

Assim, podemos verificar que existem cenários para os 100 votos em falta que originam pontuações iguais entre duas bandas, como por exemplo:

Preferência	**1.ª**	**2.ª**	**3.ª**	**4.ª**
Banda	A	C	B	D
Pontuação final	2700	2700	3000	1600

Exame – 2016, 1ª Fase

8. Aplicando o método A, temos:

<table>
<tr><th colspan="2"></th><th>150 votos</th><th>180 votos</th><th>100 votos</th><th>Pontuação</th><th>Vencedor</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Castanho
Amarelo</td><td>1ª Pref.</td><td>Castanho</td><td>Amarelo</td><td>Castanho</td><td rowspan="2">Castanho
$150 + 100 = 250$
Amarelo
180</td><td rowspan="2">Castanho</td></tr>
<tr><td>2ª Pref.</td><td>Amarelo</td><td>Castanho</td><td>Amarelo</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Castanho
Vermelho</td><td>1ª Pref.</td><td>Castanho</td><td>Vermelho</td><td>Castanho</td><td rowspan="2">Castanho
$150 + 100 = 250$
Vermelho
180</td><td rowspan="2">Castanho</td></tr>
<tr><td>2ª Pref.</td><td>Vermelho</td><td>Castanho</td><td>Vermelho</td></tr>
</table>

Como o castanho venceu as comparações com as restantes cores é a cor vencedora, usando o método A.

Aplicando o método B, temos:

- Pontuação da cor «Castanho»: $3 \times 150 + 1 \times 180 + 3 \times 100 = 930$
- Pontuação da cor «Amarelo»: $2 \times 150 + 3 \times 180 + 1 \times 100 = 1140$
- Pontuação da cor «Vermelho»: $1 \times 150 + 2 \times 180 + 2 \times 100 = 710$

Como o amarelo tem maior número de pontos é a cor escolhida, usando o método B, o que prova que o Manuel tem razão.

Exame – 2014, 2ª Fase

9. Aplicando o método referido temos:

		votos					
		50	205	145	100	Pontuação	Vencedor
Par L-R	1ª Pref.	L	R	L	L	L:$50 + 145 + 100 = 295$	L
	2ª Pref.	R	L	R	R	R: 205	
Par L-S	1ª Pref.	L	S	L	L	L:$50 + 145 + 100 = 295$	L
	2ª Pref.	S	L	S	S	S: 205	
Par L-V	1ª Pref.	V	L	V	L	L:$205 + 100 = 305$	L
	2ª Pref.	L	V	L	V	V:$50 + 145 = 195$	

Como o tema L (Liberdade) venceu a comparação com todos os restantes temas, é o tema vencedor.

Se o vencedor fosse apurado por maioria simples, tendo em conta apenas os votos na primeira preferência, a votação seria:

- Votação no tema V: $50 + 145 = 195$, a que corresponde a 39%; $\left(\frac{195}{500} = 0{,}39\right)$
- Votação no tema S: 205, a que corresponde a 41%; $\left(\frac{205}{500} = 0{,}41\right)$
- Votação no tema L: 100, a que corresponde a 20%; $\left(\frac{100}{500} = 0{,}2\right)$

Pelo que o tema vencedor seria o tema S (sonhos), o que mostra que a afirmação da professora tem fundamento.

Exame – 2014, 1ª Fase

10. Aplicando o método descrito, temos:

		1024 votos	**4328 votos**	**5152 votos**	Votação	Vencedor
jazz	**1ª linha**	*jazz*	*jazz*	*gospel*	*jazz* $1024 + 4328 = 5352$	*jazz*
gospel	**2ª linha**	*gospel*	*gospel*	*jazz*	*gospel*: 5152	
jazz	**1ª linha**	*jazz*	*pop*	*pop*	*jazz*: 1024	*pop*
pop	**2ª linha**	*pop*	*jazz*	*jazz*	*pop* $4328 + 5152 = 9480$	
pop	**1ª linha**	*pop*	*pop*	*gospel*	*pop* $1024 + 4328 = 5352$	*pop*
gospel	**2ª linha**	*gospel*	*gospel*	*pop*	*gospel*: 5152	

Assim, aplicando o método descrito, o tipo de música escolhido é *pop*, porque ganha quando comparado com os restantes tipos de música.

Exame – 2013, Ép. especial

11. Aplicando o método descrito, incluindo o tema Festas, temos:

- Pontuação do tema *Bulling*: $3 \times 415 + 1 \times 370 + 2 \times 200 = 2015$
- Pontuação do tema Solidariedade: $2 \times 415 + 3 \times 370 + 1 \times 200 = 2140$
- Pontuação do tema Festas: $1 \times 415 + 2 \times 370 + 3 \times 200 = 1755$

Excluindo o tema Festas, a tabela reorganizada, não alterando os números de votos nem a ordem de cada uma das preferências, é a seguinte:

	415 votos	**370 votos**	**200 votos**
1ª Preferência	*Bullying*	Solidariedade	*Bullying*
2ª Preferência	Solidariedade	*Bullying*	Solidariedade

E assim, aplicando o método descrito, excluindo o tema Festas, temos:

- Pontuação do tema *Bulling*: $2 \times 415 + 1 \times 370 + 2 \times 200 = 1600$
- Pontuação do tema Solidariedade: $1 \times 415 + 2 \times 370 + 1 \times 200 = 1355$

Assim, temos que com a inclusão do tema Festas, o tema escolhido é Solidariedade, porque tem a maior pontuação (2140 pontos) e, se o tema Festas for excluído, o tema escolhido é *Bulling* porque tem maior número de pontos (1600), pelo que podemos concluir que a exclusão do tema Festas altera a escolha do tema.

Exame – 2013, 1ª Fase

12. Aplicando o método descrito, temos:

<table>
<tr><td></td><td></td><td colspan="4">votos</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>1500</td><td>2100</td><td>1000</td><td>1500</td><td>Votação</td><td>Vencedor</td></tr>
<tr><td>Maria</td><td>1ª Linha</td><td>M</td><td>F</td><td>F</td><td>F</td><td>M: 1500</td><td rowspan="2">Fernanda</td></tr>
<tr><td>Fernanda</td><td>2ª Linha</td><td>F</td><td>M</td><td>M</td><td>M</td><td>F: $2100 + 1000 + 1500 =$
$= 4600$</td></tr>
<tr><td>Luísa</td><td>1ª Linha</td><td>L</td><td>L</td><td>F</td><td>F</td><td>L: $1500 + 2100 =$
$= 3600$</td><td rowspan="2">Luísa</td></tr>
<tr><td>Fernanda</td><td>2ª Linha</td><td>F</td><td>F</td><td>L</td><td>L</td><td>F: $1000 + 1500 =$
$= 2500$</td></tr>
<tr><td>Luísa</td><td>1ª Linha</td><td>M</td><td>L</td><td>L</td><td>M</td><td>L: $2100 + 1000 =$
$= 3100$</td><td rowspan="2">Luísa</td></tr>
<tr><td>Maria</td><td>2ª Linha</td><td>L</td><td>M</td><td>M</td><td>L</td><td>M: $1500 + 1500 =$
$= 3000$</td></tr>
</table>

Assim, aplicando o método descrito, a candidata escolhida para presidente da comissão organizadora, é a Luísa porque ganha quando comparada com as restantes candidatas.

Exame – 2012, 1ª Fase

13. Aplicando o método de contagem de Borda, temos:

- Pontuação da cidade de Braga: $3 \times 8 + 1 \times 6 + 1 \times 4 + 2 \times 3 = 40$
- Pontuação da cidade de Lamego: $2 \times 8 + 3 \times 6 + 2 \times 4 + 1 \times 3 = 45$
- Pontuação da cidade de Amarante: $1 \times 8 + 2 \times 6 + 3 \times 4 + 3 \times 3 = 41$

Logo, pelo método de contagem de Borda a cidade escolhida é Lamego (porque tem o maior número de pontos). Assim, podemos verificar que esta eleição não respeita a primeira preferência mais votada, que é a cidade de Braga (com 8 votos, enquanto Amarante tem 7 votos e Lamego apenas 6 votos).

Exame – 2011, 2ª Fase

14. Aplicando o método de contagem de Borda, temos:

- Pontuação do Nuno: $4 \times 25 + 2 \times 40 + 4 \times 15 + 3 \times 10 + 3 \times 5 = 285$
- Pontuação da Ana: $3 \times 25 + 1 \times 40 + 2 \times 15 + 2 \times 10 + 1 \times 5 = 170$
- Pontuação da Inês: $2 \times 25 + 3 \times 40 + 3 \times 15 + 1 \times 10 + 2 \times 5 = 235$
- Pontuação do Pedro: $1 \times 25 + 4 \times 40 + 1 \times 15 + 4 \times 10 + 4 \times 5 = 260$

Assim, o candidato vencedor é o Nuno, porque tem o maior número de pontos.

Exame – 2009, 1ª Fase

15.

15.1. Calculando o número de votos que cada uma das cidades obteve, na primeira preferência, temos:

- Madrid: $50 + 30 = 80$
- Vigo: 60
- Sevilha: 40
- Granada: $14 + 22 = 36$

15.2. Analisando as votações, temos que:

- O número total de votos é: $50 + 60 + 40 + 14 + 30 + 22 = 216$
- O número total de votos necessários para obter a maioria absoluta, ou seja, o número mínimo de votos necessários para que uma cidade tivesse sido eleita vencedora na primeira contagem é:

$$\frac{216}{2} + 1 = 109$$

15.3. Como na primeira contagem nenhuma cidade obteve a maioria absoluta e a cidade de Granada foi a menos votada, o quadro de preferências reestruturado é:

Preferências	**Votos**					
1ª	Madrid	Vigo	Sevilha	Madrid	Madrid	Sevilha
2ª	Sevilha	Sevilha	Vigo	Vigo	Vigo	Madrid
3ª	Vigo	Madrid	Madrid	Sevilha	Sevilha	Vigo
Total de votos	**50**	**60**	**40**	**14**	**30**	**22**

Contabilizando o número de votos obtidos, na primeira preferência, por cada cidade, temos:

- Madrid: $50 + 14 + 30 = 94$
- Vigo: 60
- Sevilha: $40 + 22 = 62$

Como nesta contagem ainda nenhuma cidade obteve a maioria absoluta e a cidade de Vigo foi a menos votada, o quadro de preferências novamente reestruturado é:

Preferências	**Votos**					
1ª	Madrid	Sevilha	Sevilha	Madrid	Madrid	Sevilha
2ª	Sevilha	Madrid	Madrid	Sevilha	Sevilha	Madrid
Total de votos	**50**	**60**	**40**	**14**	**30**	**22**

Contabilizando o número de votos obtidos, na primeira preferência, por cada cidade, temos:

- Madrid: $50 + 14 + 30 = 94$
- Sevilha: $60 + 40 + 22 = 122$

Como Sevilha tem 122 votos, mais do que os 109 necessários para ter maioria absoluta, a cidade de Sevilha é a cidade aonde se vai realizar a viagem de finalistas.

15.4. Sabendo que 4% dos alunos do 12.º ano não votaram, então o total dos 216 votos correspondem a uma percentagem de $100 - 4 = 96\%$ dos alunos. Desta forma podemos calcular o total (t) dos alunos que frequentam o 12.º ano de escolaridade:

$$\frac{t}{216} = \frac{100}{96} \Leftrightarrow t = \frac{100 \times 216}{96} \Leftrightarrow t = 225$$

Exame – 2008, 2ª Fase

16.

16.1. Completando a tabela para o apuramento do candidato vencedor, temos:

MÉTODO PREFERENCIAL

Contagem dos pontos		Pontuação total
João	$40 \times 1 + 45 \times 3 + 38 \times 1$	213
Rui	$40 \times 3 + 45 \times 1 + 38 \times 2$	241
Luís	$40 \times 2 + 45 \times 2 + 38 \times 3$	284

Assim, como o Luís é o candidato com pontuação total mais elevada, é o candidato vencedor segundo este método.

16.2.

16.2.1. Construindo as tabelas com as comparações entre o Rui e o Luís, e depois entre o João e o Luís, e identificando o vencedor em cada caso, temos:

COMPARAÇÃO DA VOTAÇÃO NO RUI COM A VOTAÇÃO NO LUÍS

PREFERÊNCIAS	VOTOS		
1ª	Rui	Luís	Luís
2ª	Luís	Rui	Rui
TOTAL	40	45	38

Nesta comparação o vencedor é o Luís com $45 + 38 = 83$ votos, porque o Rui teve apenas 40 votos.

COMPARAÇÃO DA VOTAÇÃO NO JOÃO COM A VOTAÇÃO NO LUÍS

PREFERÊNCIAS	VOTOS		
1ª	Luís	João	Luís
2ª	João	Luís	João
TOTAL	40	45	38

Nesta comparação o vencedor também é o Luís com $40 + 38 = 78$ votos, porque o João teve apenas 45 votos.

16.2.2. Organizando as contagens dos resultados das comparações dos candidatos dois a dois, temos:

- Comparação entre o Rui e o João:
  - Rui: $40 + 38 = 78$ votos
  - João: 45 votos

  Vencedor: Rui
- Comparação entre o Rui e o Luís:
  - Rui: 40 votos
  - Luís: $45 + 38 = 83$ votos

  Vencedor: Luís
- Comparação entre o João e o Luís:
  - João: 45 votos
  - Luís: $40 + 38 = 75$ votos

  Vencedor: Luís

Desta forma temos que na ordenação dos candidatos, em primeiro lugar figura o Luís (com a vitória em 2 comparações), em segundo lugar figura o Rui (vencendo 1 comparação) e em terceiro lugar o João (sem qualquer vitória nas comparações).

Desta forma o Luís tem razões para assumir que deve ser considerado o vencedor porque vence quando comparado diretamente com qualquer um dos restantes candidatos.

Exame – 2007, 2ª Fase

17. Pela observação do gráfico podemos verificar que o partido A obteve mais de 40% dos votos na eleição de 2001, sendo o partido mais votado. Assim, o Presidente da Câmara eleito em 1997 pelo partido A foi reeleito porque se recandidatou pelo partido A em 2001 e este foi o partido mais votado.

Exame – 2006, 2ª Fase