

Matemática Aplicada às Ciências Sociais - 11º Ano

Teoria de Grafos

Exercícios de exames

1. Admita que, no distrito de Castelo Branco, se pretende adotar uma nova tecnologia na iluminação de estradas. Na tabela seguinte, apresenta-se a extensão, em quilómetros, das estradas onde se poderá adotar esta tecnologia.

	Benquerença (B)	Louriçal do Campo (L)	Oleiros(O)	Torrezelo (T)
Alcafozes(A)	60	51	124	167
Benquerença (B)	—	39	68	173
Louriçal do Campo (L)	—	—	100	144
Oleiros (O)	—	—	—	112

Não sendo viável, por razões económicas, adotar esta tecnologia em todas as estradas, decidiu-se, numa fase inicial, proceder à sua adoção somente em algumas delas.

Para a seleção das estradas recorreu-se ao algoritmo seguinte.

- Constrói-se um grafo, cujos vértices representam as localidades, selecionando-se, sucessivamente, as menores extensões de estradas entre elas, tendo-se em conta que:
 - se a aresta a que corresponde a extensão selecionada levar à formação de um circuito, essa aresta não deve ser considerada;
 - caso contrário, essa aresta deve ser considerada.
- O algoritmo termina quando, no grafo, o número de arestas é igual ao número de vértices menos um.

Determine, nestas condições, o número de quilómetros de estrada que o projeto de iluminação deve contemplar na sua fase inicial. Na sua resposta, apresente o grafo que resulta da aplicação do algoritmo, indicando o peso de cada aresta.

Exame – 2018, Ép. especial



2. Na preparação da sua digressão pelas ilhas do arquipélago dos Açores, a companhia de teatro optou por apresentar a peça somente nas ilhas com, pelo menos, 6000 habitantes.

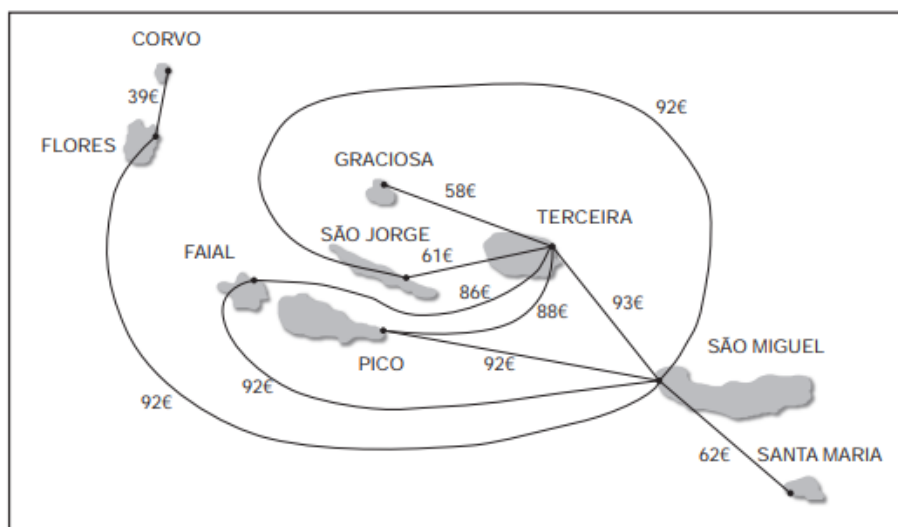
Na tabela seguinte, está registado o número de habitantes em cada uma das ilhas.

Ilha	N.º de habitantes
Santa Maria	5547
São Miguel	137 699
Terceira	56 062
Graciosa	4393
São Jorge	8998
Pico	14 144
Faial	15 038
Flores	3791
Corvo	430

Fonte: Censos 2011

De modo a minimizar o custo das deslocações aéreas, foram analisados os preços das ligações aéreas diretas, existentes entre as diferentes ilhas, a que a companhia de teatro poderá recorrer.

Na figura seguinte, estão indicadas essas ligações aéreas diretas entre as ilhas do arquipélago dos Açores e o respetivo custo, por pessoa.



A companhia de teatro optou por começar a digressão na ilha do Faial, pretendendo terminá-la noutra ilha.

De modo a minimizar o custo das viagens, aplicou o método que a seguir se descreve.

- Seleciona-se a ilha seguinte, tendo em conta que:
 - deverá corresponder à viagem de preço mais baixo;
 - se houver duas ilhas para as quais seja possível viajar pelo mesmo preço, a seleção é aleatória.
- Proceda-se como foi indicado no ponto anterior, não se repetindo nenhuma ilha e terminando depois de serem visitadas todas as ilhas incluídas na digressão.



Determine o custo mínimo em deslocações aéreas de cada elemento da companhia de teatro na sua digressão pelo arquipélago dos Açores, respeitando as condições definidas.

Na sua resposta, apresente:

- um grafo ponderado que resulte da aplicação do método descrito;
- a ordem pela qual a companhia de teatro visitará as ilhas.

Exame – 2018, 2ª Fase

3. Mariana decidiu viajar até Praga e, a partir daí, visitar outras capitais europeias, regressando a essa primeira cidade no final da visita.

As capitais que pretende visitar, além de Praga, são Berlim, Bratislava, Varsóvia e Viena.

Para planear as suas férias, Mariana utilizou a tabela seguinte, que apresenta as distâncias, em quilómetros, entre as referidas capitais.

	Bratislava	Praga	Varsóvia	Viena
Berlim	677	349	572	640
Bratislava	—	328	673	80
Praga	—	—	681	305
Varsóvia	—	—	—	689

Com base na informação apresentada e num mapa da Europa semelhante ao que se apresenta na figura seguinte, Mariana construiu um grafo em que duas capitais são interligadas, desde que os países a que pertencem façam fronteira entre si.



O seu percurso será definido a partir do grafo construído e atendendo ao seguinte algoritmo:

- escolher a aresta do grafo com menor peso, qualquer que ela seja;
- escolher, sucessivamente, as arestas de menor peso, garantindo que três arestas do percurso que está a ser definido não se encontram num mesmo vértice e não permitindo que se fechem percursos sem que todos os vértices sejam incluídos.

Apresente um percurso possível, definido por Mariana, com início e fim em Praga.

Na sua resposta, apresente:

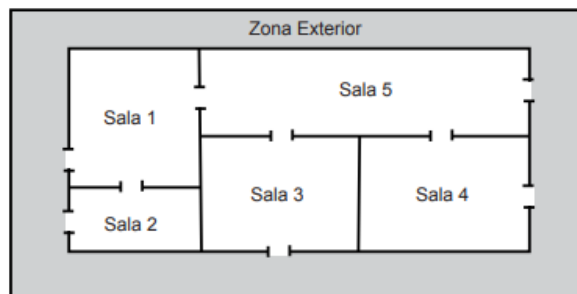
- um grafo semelhante ao que Mariana construiu;
- a ordenação das arestas selecionadas pelo algoritmo descrito;
- um percurso que Mariana poderá ter definido.

Exame – 2018, 1ª Fase



4. Na figura seguinte, está representada a planta do recinto de um dos cinemas onde decorre o CineJov.

O recinto é composto por cinco salas, numeradas de 1 a 5, e por uma Zona Exterior, num total de seis espaços. Todas as salas têm um único acesso à Zona Exterior e todas têm comunicação com, pelo menos, uma outra sala, como se observa na figura seguinte.



No final do dia, um funcionário faz uma inspeção completa ao recinto, respeitando as seguintes condições:

- passa por todas as portas;
- começa e termina na Sala 1.

Para realizar esta inspeção, o funcionário pode sair das diferentes áreas do recinto e nelas voltar a entrar as vezes que considerar necessárias. Com base na sua experiência, afirma que é impossível fazer a inspeção completa ao recinto, passando uma única vez por cada uma das portas.

Justifique que o funcionário tem razão e identifique a porta pela qual terá necessariamente de passar duas vezes.

Na sua resposta, apresente um grafo que modele a situação descrita.

Exame – 2017, Ép. especial



5. A associação de estudantes está a preparar um pedipaper que engloba seis postos de controlo, designados por C_1 , C_2 , C_3 , C_4 , C_5 e C_6 .

Na tabela seguinte, estão indicadas as distâncias, em metros, entre diferentes postos de controlo.

	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
C_1	160	–	–	302	180
C_2	–	253	–	350	270
C_3	–	–	286	340	267
C_4	–	–	–	–	294

A associação de estudantes decidiu que o pedipaper se iniciaria no posto de controlo C_5 e terminaria num outro posto de controlo.

Além disso, para definir o percurso, a associação de estudantes optou por utilizar o método seguinte.

- Seleciona-se o posto de controlo seguinte, tendo em conta que:
 - deve ser o mais próximo possível;
 - se houver dois postos à mesma distância, a seleção é aleatória.
- Procede-se como foi indicado no ponto anterior, não se repetindo nenhum posto de controlo, e terminando depois de serem visitados todos os postos de controlo.

Determine o comprimento do percurso, respeitando as condições definidas pela associação de estudantes.

Na sua resposta, apresente:

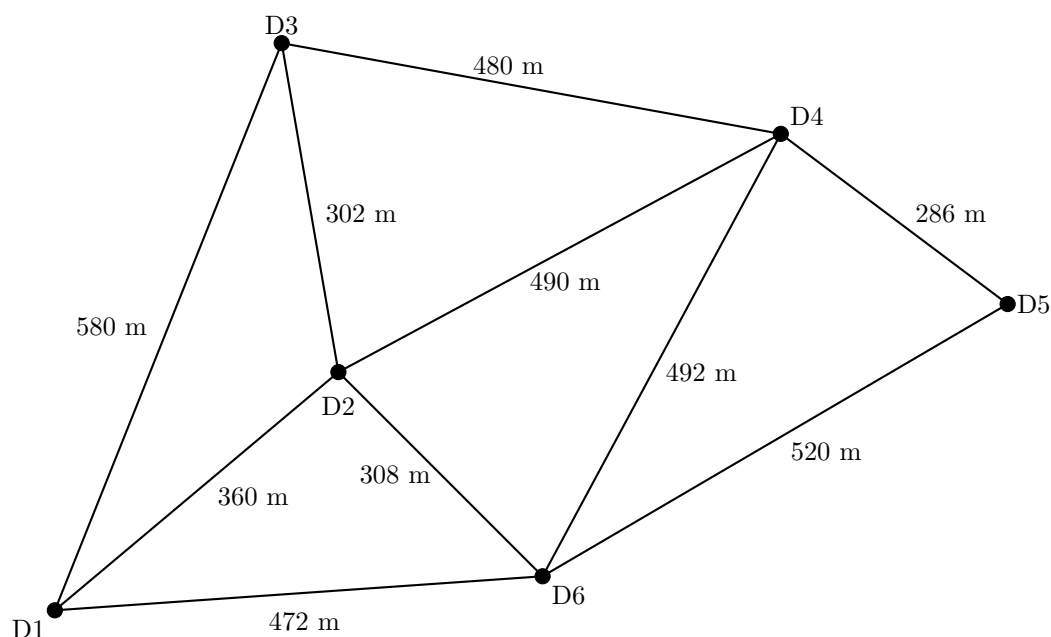
- um grafo ponderado que modele a situação descrita na tabela anterior;
- a ordem de visita dos postos de controlo.

Exame – 2017, 2ª Fase



6. As seis diversões mais procuradas da zona *Studiospeed* estão representadas na figura seguinte pelas letras D1, D2, D3, D4, D5 e D6.

As linhas representam as ligações existentes entre essas diversões. O comprimento de cada ligação está indicado junto da linha que a representa.



Uma empresa de eletricidade pretende renovar a rede de cabos elétricos, aproveitando algumas destas ligações. De modo a minimizar a quantidade de cabo utilizado, aplica-se o método que a seguir se descreve.

- Escolhe-se, ao acaso, uma das seis diversões e, de entre as ligações a essa diversão, seleciona-se a ligação de menor comprimento.
- Seleciona-se a ligação de menor comprimento de entre as ligações a qualquer uma das duas diversões escolhidas para uma diversão ainda não selecionada.
- Seleciona-se a ligação de menor comprimento de entre as ligações a qualquer uma das diversões escolhidas para uma diversão ainda não selecionada.
- Repete-se o ponto anterior até todas as diversões terem sido selecionadas.

Determine a quantidade mínima, em metros, de cabo elétrico que é necessário instalar para que as seis diversões recebam energia elétrica.

Na sua resposta, apresente:

- um grafo que resulte da aplicação do método descrito e que permita identificar as ligações utilizadas;
- a quantidade mínima, em metros, de cabo elétrico que é necessário instalar.

Exame – 2017, 1ª Fase



7. As instalações do TPT estão distribuídas por cinco edifícios: E1, E2, E3, E4 e E5.

As distâncias mínimas, em metros, entre cada dois edifícios estão registadas na tabela seguinte.

	E2	E3	E4	E5
E1	166	206	125	287
E2	—	151	264	169
E3	—	—	207	109
E4	—	—	—	309

No final de cada dia, um estafeta recolhe o correio em cada um dos edifícios. De modo a tornar mais eficiente o seu trabalho, começou por ordenar, de forma crescente, as distâncias registadas na tabela anterior. De seguida, recorrendo a um grafo, construiu um percurso fechado que ligava os cinco edifícios. Para tal, adotou o seguinte método.

- Representou a primeira aresta do grafo correspondente à menor das distâncias entre os edifícios.
- Representou as restantes arestas, selecionando sucessivamente as menores distâncias, garantindo que três delas não se encontrassem num mesmo vértice e que não se fechassem percursos sem que todos os vértices estivessem incluídos.

Apresente um possível percurso final definido pelo estafeta, com início e fim no edifício principal (E3).

Na sua resposta, apresente:

- a ordenação, de forma crescente, das distâncias registadas na tabela anterior;
- um grafo semelhante ao que terá sido construído pelo estafeta.

Exame – 2016, Ép. especial



8. No Encontro Desportivo Internacional, existem atletas que estão inscritos em mais do que uma modalidade. Para que todos consigam realizar um treino de adaptação ao estádio onde se irão realizar as provas, vai ser criado um horário com blocos de utilização das instalações. De cada bloco deverão fazer parte as modalidades nas quais não haja atletas inscritos simultaneamente.

A constituição de cada bloco será definida considerando os dados da tabela seguinte, na qual o símbolo **X** indica as modalidades que podem ser inseridas num mesmo bloco.

Modalidades	A	B	C	D	E	F	G	H
A			X	X		X		
B							X	
C	X					X		
D	X							X
E								
F	X		X					
G		X						
H				X				

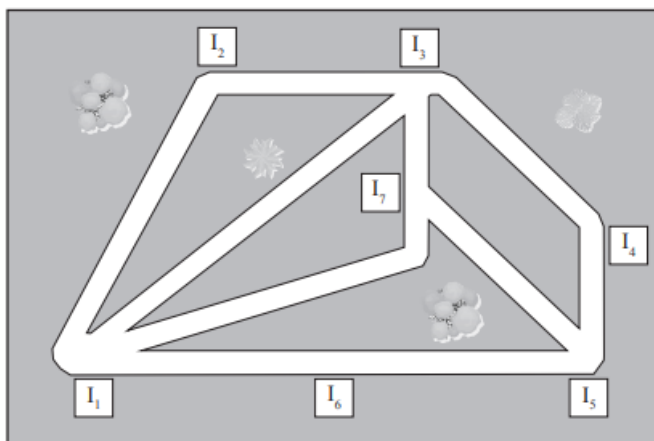
Determine, tendo em conta as condições dadas, o número mínimo de blocos que será necessário constituir, de modo que todos os atletas possam realizar o treino de adaptação em todas as modalidades em que estão inscritos. Na sua resposta

- apresente um grafo que modele a situação;
- identifique as modalidades que constituem cada um dos blocos.

Exame – 2016, 2ª Fase



9. Na figura seguinte, apresenta-se um mapa do recinto do MaréFest no qual estão representadas as infraestruturas I_1 , I_2 , I_3 , I_4 , I_5 , I_6 e I_7 , ligadas entre si através de troços pedonais.



Considera-se troço pedonal a ligação entre duas infraestruturas adjacentes, isto é, o percurso que pode ser usado para ir de uma dessas infraestruturas à outra sem passar por mais nenhuma.

Um vigilante do recinto pretende vistoriar as condições de segurança de todos os troços pedonais, iniciando e terminando a sua vistoria junto da mesma infraestrutura. Observando o mapa, conclui que não será possível, nestas condições, percorrer todos os troços pedonais sem repetir nenhum.

Apresente uma sugestão de um único troço pedonal a repetir pelo vigilante, que lhe permita percorrer todos os troços, iniciando e terminando a vistoria junto da mesma infraestrutura, sendo o número de troços a percorrer o menor possível.

Na sua resposta, apresente:

- um grafo que modele o mapa do recinto com as infraestruturas, de I_1 a I_7 , e com os troços pedonais.
- uma justificação da veracidade da conclusão do vigilante.

Exame – 2016, 1ª Fase



10. A companhia de aviação ASA5 opera nos aeroportos nacionais.

O diretor de operações de terra da companhia de aviação ASA5 fez uma lista das tarefas efetuadas entre a aterragem de um certo avião e uma nova decolagem.

A tabela seguinte apresenta o tempo necessário para concretizar cada tarefa (Duração) e, quando existem, as tarefas que devem ser previamente concluídas (Tarefa(s) precedente(s)).

Tarefa	Duração (em minutos)	Tarefa(s) precedente(s)
Carregamento de bagagem (CB)	16	Descarga de bagagem (DB)
Descarga de bagagem (DB)	2	—
Desembarque de passageiros (DP)	14	—
Embarque de passageiros (EP)	20	Desembarque de passageiros (DP) e Descarga de bagagem (DB)
Limpeza da cabine (LC)	12	Desembarque de passageiros (DP)
Reabastecimento alimentar (RA)	4	Limpeza da cabine (LC)

Há tarefas que se podem realizar em simultâneo, por exemplo, enquanto decorre o Desembarque de passageiros (DP), pode estar a realizar-se a Descarga de bagagem (DB).

Determine o tempo mínimo, em minutos, necessário para realizar todas as tarefas que antecedem uma nova decolagem (D) desse avião da ASA5, nas condições previstas na tabela anterior.

Na sua resposta, apresente:

- um grafo que represente a situação, incluindo o significado dos elementos (arestas e vértices) que o constituem;
- as possíveis sequências de concretização das tarefas e a respetiva duração.

Exame – 2015, Ép. especial



11. O Sr. Pereira é motorista da empresa PTM.

Num certo dia, o Sr. Pereira tem de passar nas cidades A, B, D e E, não necessariamente por esta ordem, partindo da sede da empresa, localizada na cidade C, e regressando ao local de partida. Nesse percurso, não pode passar pela mesma cidade mais do que uma vez.

Na tabela seguinte, estão assinaladas com o símbolo ✓ as ligações rodoviárias existentes entre as cidades. O símbolo ✗ significa que não existe ligação rodoviária entre as cidades.

	A	B	C	D	E
A		✓	✗	✓	✓
B			✓	✗	✓
C				✓	✗
D					✓
E					

O Sr. Pereira, ao organizar o percurso, considerou duas possibilidades:

alternativa 1: passar pela cidade A e só depois pela cidade E.

alternativa 2: passar pela cidade D antes de passar pela cidade B.

O Sr. Pereira afirma que a alternativa 1 permite definir mais percursos do que a alternativa 2.

O Sr. Pereira tem razão? Justifique, apresentando um grafo que modele a situação descrita, e identifique todos os percursos possíveis para cada uma das alternativas.

Exame – 2015, 2ª Fase



12. Uma agência de viagens, sediada no concelho de Avelares, organiza e vende, através da Internet, percursos de autocarro entre várias cidades europeias.

Para organizar um percurso que passe por Amesterdão, Berlim, Munique, Paris e Viena, um funcionário da agência começou por registar, na tabela seguinte, as distâncias mínimas, em quilómetros, entre cada duas cidades.

	Amesterdão	Berlim	Munique	Paris	Viena
Amesterdão		663	825	501	1148
Berlim			604	1055	674
Munique				828	435
Paris					1236
Viena					

De forma a minimizar os custos operacionais, o funcionário definiu, através de um grafo, um percurso fechado que liga as cinco cidades, tendo adotado o seguinte procedimento:

- escolher a aresta do grafo com menos peso, qualquer que ela seja;
- escolher, sucessivamente, as arestas de menos peso, garantindo que três arestas do percurso que está a ser definido não se encontram num mesmo vértice e não permitindo que se fechem percursos sem que todos os vértices sejam incluídos;
- apresentar um percurso pretendido conforme o vértice de partida escolhido.

Apresente um percurso possível, com início e fim em Amesterdão, de acordo com o procedimento utilizado pelo funcionário da agência.

Na sua resposta, apresente:

- o grafo usado, indicando os pesos de cada aresta;
- um percurso que o funcionário poderá ter definido.

Exame – 2015, 1ª Fase



13. O Francisco reside na vivenda A, em Penha Alta, e dá apoio domiciliário a residentes em quatro vivendas, B, C, D e E.

Na tabela seguinte, estão registadas as distâncias mínimas, em metros, entre as cinco vivendas: A, B, C, D e E.

	B	C	D	E
A	100	110	100	150
B	—	100	190	110
C	—	—	180	140
D	—	—	—	110

De modo a determinar a distância mínima a percorrer na visita aos residentes a quem dá apoio domiciliário, o Francisco aplica o algoritmo seguinte.

- Define-se A como ponto de partida.
- Seleciona-se a vivenda mais próxima e estabelece-se a ligação entre as duas tendo em conta que, se houver duas vivendas à mesma distância, a escolha é aleatória. Essa ligação é o caminho a percorrer entre as duas vivendas.
- Procede-se como foi indicado no ponto anterior, não se repetindo nenhuma vivenda e regressando-se ao ponto de partida depois de selecionar todas as vivendas.

Mostre, aplicando o algoritmo, que a escolha aleatória, quando existem duas vivendas à mesma distância, pode levar o Francisco a percorrer uma distância maior do que seria necessário para visitar os residentes a quem dá apoio domiciliário.

Exame – 2014, 2ª Fase



14. O conselho diretivo de uma faculdade pretende instalar cabo de fibra ótica a ligar sete pavilhões: A1, A2, A3, A4, A5, A6 e A7.

Na tabela seguinte, encontram-se registadas algumas distâncias mínimas, em metros, entre os pavilhões.

	A2	A3	A4	A5	A6	A7
A1	500	—	—	—	730	350
A2	—	190	—	200	340	—
A3	—	—	150	100	—	—
A4	—	—	—	220	240	—
A5	—	—	—	—	220	—
A6	—	—	—	—	—	650

A instalação de cabo de fibra ótica custa 3,40 euros por metro.

De modo a minimizar o custo da instalação do cabo de fibra ótica, a ligação entre os pavilhões foi feita recorrendo-se ao algoritmo seguinte.

- Ordenam-se as distâncias registadas na tabela anterior, pela ordem crescente da sua grandeza, indicando-se, para cada distância, o par de pavilhões que lhe corresponde.
- Constrói-se um grafo, cujos vértices representam os pavilhões, selecionando-se, sucessivamente, as distâncias menores e tendo-se em conta que, se a aresta a que corresponde a distância selecionada não levar à formação de um circuito, essa aresta deve ser considerada; caso contrário, essa aresta não deve ser considerada.
- O algoritmo termina quando, no grafo, o número de arestas é igual ao número de vértices menos um.

Determine, nestas condições, o custo mínimo da instalação do cabo de fibra ótica.

Na sua resposta, deve:

- aplicar o algoritmo;
- indicar o número mínimo de metros de cabo de fibra ótica necessários;
- calcular o custo mínimo da instalação do cabo de fibra ótica.

Exame – 2014, 1ª Fase



15. O Luís pretende visitar quatro cidades: Braga, Porto, Lamego e Viseu.

A viagem inicia-se e termina em Amarante, não importando a ordem pela qual as cidades são visitadas, pois a partir de cada uma delas é possível ir diretamente a qualquer uma das outras.

Na tabela seguinte, estão indicadas as distâncias, em quilómetros, entre as cidades referidas.

	Braga	Porto	Lamego	Viseu
Amarante	74	61	71	107
Braga	—	70	117	130
Porto	—	—	106	75
Lamego	—	—	—	62

O Luís pretende aplicar uma das opções seguintes para determinar um percurso com início e fim em Amarante e no qual nenhuma cidade seja repetida.

Opção 1
Passo 1: define-se a cidade de Amarante como ponto de partida.
Passo 2: seleciona-se a cidade mais próxima, tendo em conta que, se houver duas cidades à mesma distância, a seleção é aleatória.
Passo 3 e passos seguintes: procede-se como foi indicado no passo anterior, não se repetindo nenhuma cidade, e regressando-se ao ponto de partida depois de visitadas todas as cidades.

Opção 2
Passo 1: ordenam-se as distâncias entre cada par de cidades por ordem crescente, indicando-se, para cada valor, o par de cidades que lhe corresponde.
Passo 2: selecionam-se, sucessivamente, as distâncias menores, tendo em conta que: <ul style="list-style-type: none">• uma cidade nunca poderá aparecer três vezes;• nunca se fecha um circuito enquanto houver cidades por visitar.
Passo 3: ordena-se a solução de acordo com a cidade de partida (Amarante).

O Luís considera que a opção 1 dá um percurso cujo número total de quilómetros é inferior ao dado pela opção 2.

Verifique se o Luís tem, ou não, razão.

Na sua resposta, deve:

- apresentar um grafo ponderado que represente a situação;
- aplicar cada uma das opções;
- indicar o número total de quilómetros percorridos em cada uma das duas opções;
- apresentar uma conclusão.

Exame – 2013, Ép. especial

