Matemática Aplicada às Ciências Sociais - 11º Ano
Teoria de Grafos
Propostas de resolução

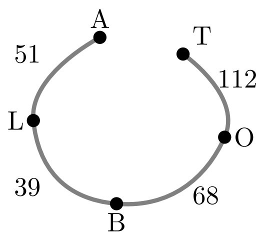
Exercícios de exames

1. De acordo com a tabela, considerando as arestas por ordem crescente de ponderação, temos:

   - Aresta BL - ponderação 39
   - Aresta LA - ponderação 51
   - Aresta BA - forma um circuito
   - Aresta BO - ponderação 68
   - Aresta LO - forma um circuito
   - Aresta OT - ponderação 112

   Desta forma, desenhando um grafo que resulta da aplicação do algoritmo, temos:

   - Número de vértices: 5
   - Número de arestas: $4=5-1$
   - Ponderação total: $39 + 51 + 68 + 112 = 270$

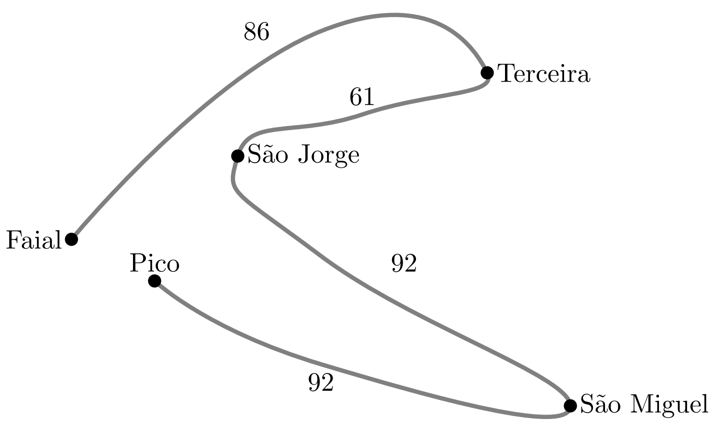


   Assim, temos que, nas condições do enunciado, o projeto de iluminação deve contemplar na sua fase inicial 270 km de estrada.

   Exame – 2018, Ép. especial

2. De acordo com o grafo, iniciando o percurso na ilha do Faial e usando o método descrito, excluindo as ilhas de Santa Maria, Graciosa, Flores e Corvo, por terem menos de 6000 habitantes, obtemos a seguinte ordenação esquematizada no grafo da figura:

   - Faial - Terceira (86€)
   - Terceira - São Jorge (61€)
   - São Jorge - São Miguel (92€)
   - São Miguel - Pico (92€)



   E assim o custo mínimo em deslocações aéreas de cada elemento da companhia de teatro na sua digressão pelo arquipélago dos Açores, determinado a partir da aplicação do algoritmo é:

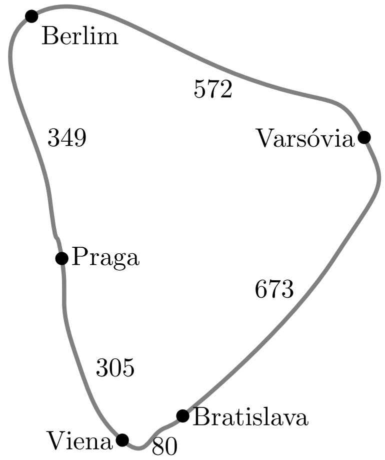
   $$86 + 61 + 92 + 92 = 331€$$

   Exame – 2018, 2ª Fase

3. De acordo com a tabela e com a aplicação do algoritmo, obtemos a seguinte ordenação das arestas e grafo da figura:

   I- Aresta Bratislava-Viena - ponderação 80 (a aresta com menor peso)
   II- Aresta Praga-Viena - ponderação 305
   III- Aresta Berlim-Praga - ponderação 349
   IV- Aresta Berlim-Varsóvia - ponderação 572
   V- Aresta Bratislava-Varsóvia - ponderação 673

   (não se considera a aresta Bratislava-Praga, porque fecharia um percurso sem incluir o vértice Berlim, nem a aresta Berlim-Varsóvia porque iria fechar um percurso sem que todos os vértices estivessem incluídos).



   Desta forma, um percurso que Mariana poderá ter definido, com início e fim em Praga, é:

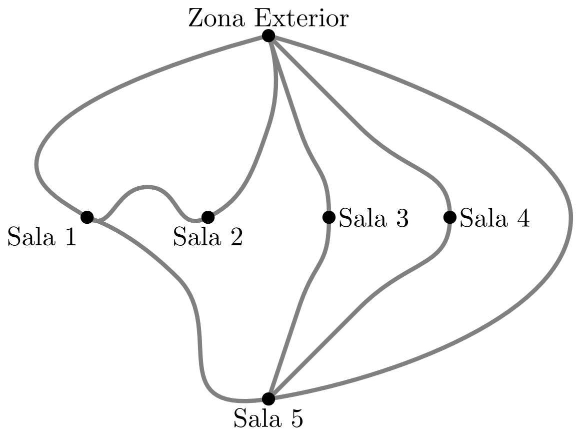
   $$\text{Praga} \rightarrow \text{Berlim} \rightarrow \text{Varsóvia} \rightarrow \text{Bratislava} \rightarrow \text{Viena} \rightarrow \text{Praga}$$

   (o mesmo percurso em sentido inverso também satisfaz as condições do enunciado).

Exame – 2018, 1ª Fase

4. De acordo com a planta do edifício, considerando as salas e o espaço exterior como vértices e as portas como arestas, obtemos o grafo da figura seguinte, e o grau de cada de cada vértice:

   - Sala 1 - Grau 3
   - Sala 2 - Grau 2
   - Sala 3 - Grau 2
   - Sala 4 - Grau 2
   - Sala 5 - Grau 4
   - Zona Exterior - Grau 5



   Como se tentou encontrar um percurso que começa e termina no mesmo vértice (Sala 1), e utiliza cada aresta (porta) uma única vez, estamos a tentar encontrar um circuito de Euler, o que só é possível se todos os vértices tiverem grau par, o que não acontece neste caso, porque existem dois vértices com grau ímpar: Sala 1 (grau 3) e Zona Exterior(grau 5). Ou seja, o funcionário tem razão.

   Assim, podemos verificar que não considerando a aresta que une os dois vértices de grau de ímpar, tornaria o percurso possível, porque todos os vértices teriam grau par, pelo que a porta que corresponde a esta aresta é aquela em que o funcionário terá necessariamente de passar duas vezes, ou seja a porta entre a Sala 1 e a Zona Exterior.

Exame – 2017, Ép. especial

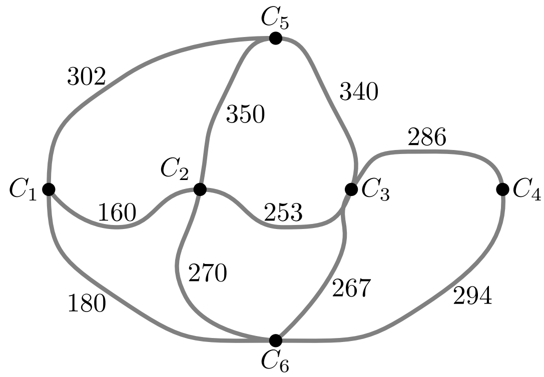
5. De acordo com a tabela obtemos o grafo da figura ao lado.

   Iniciando o pedipaper se no posto de controlo C_5 e aplicando o algoritmo, temos a seguinte sequência de visita aos postos de controlo:

   $$C_5 \rightarrow C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow C_3 \rightarrow C_6 \rightarrow C_4$$

   E assim, o comprimento do percurso, respeitando as condições definidas pela associação de estudantes, é:

   $$302 + 160 + 253 + 267 + 294 = 1276 \text{ m}$$



Exame – 2017, 2ª Fase

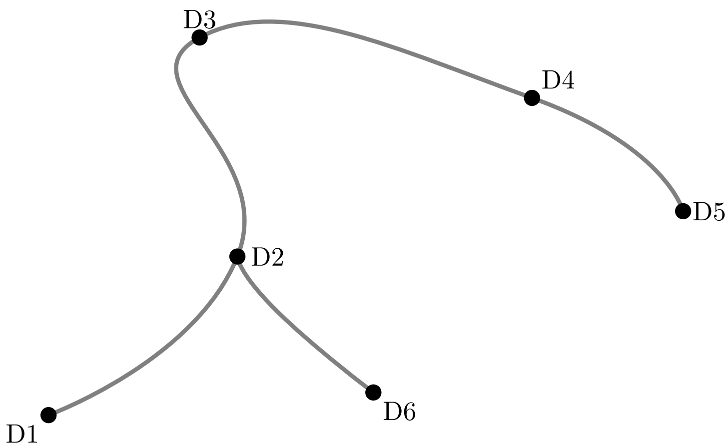
6. De acordo com o grafo apresentado e com a aplicação do algoritmo, selecionando inicialmente a diversão D1, obtemos a seguinte seleção das arestas e o grafo da figura seguinte:

   I- Diversão D1
   II- Aresta D1-D2 - ponderação 360
   III- Aresta D2-D3 - ponderação 302
   IV- Aresta D2-D6 - ponderação 308
   V- Aresta D3-D4 - ponderação 480
   VI- Aresta D4-D5 - ponderação 286

   (a seleção de outra diversão na fase inicial do algoritmo não altera a árvore abrangente mínima obtida).

   Assim, a quantidade mínima, em metros, de cabo elétrico que é necessário instalar, corresponde à soma das ponderações das arestas selecionadas, ou seja:

   $$360 + 302 + 308 + 480 + 286 = 1736 \text{ m}$$



Exame – 2017, 1ª Fase

7. Ordenando as distâncias entre os cinco edifícios registadas na tabela, temos:

$$\underset{E3-E5}{109} < \underset{E1-E4}{125} < \underset{E2-E3}{151} < \underset{E1-E2}{166} < \underset{E2-E5}{169} < \underset{E1-E3}{206} < \underset{E3-E4}{207} < \underset{E2-E4}{264} < \underset{E1-E5}{287} < \underset{E4-E5}{309}$$

Aplicando o algoritmo indicado, obtemos a seguinte seleção de arestas e o grafo da figura seguinte:

I- Aresta E3-E5 (109 m)

II- Aresta E1-E4 (125 m)

III- Aresta E2-E3 (151 m)

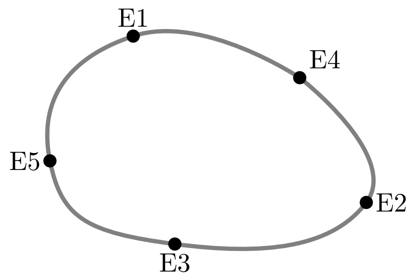
(não se considera a aresta E1-E2, porque se encontrariam três arestas no vértice E1)

(não se considera a aresta E2-E5, porque fecharia um percurso sem que todos os vértices estivessem incluídos)

(não se consideram as arestas E1-E3 e E3-E4, porque se encontrariam três arestas no vértice E3)

IV- Aresta E2-E4 (264 m)

V- Aresta E1-E5 (287 m)

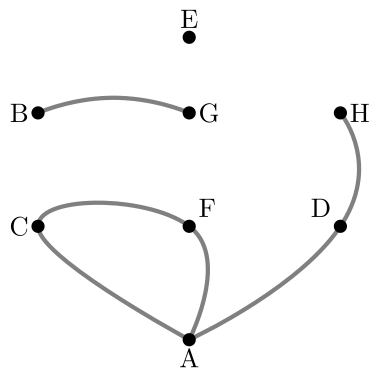


Assim, um possível percurso final definido pelo estafeta, com início e fim no edifício principal (E3), é:

E3 → E5 → E1 → E4 → E2 → E3 → E5

Exame – 2016, Ép. especial

8. De acordo com a tabela obtemos o grafo da figura ao lado, em que cada vértice representa uma modalidade e cada aresta representa a compatibilidade dentro do mesmo bloco.



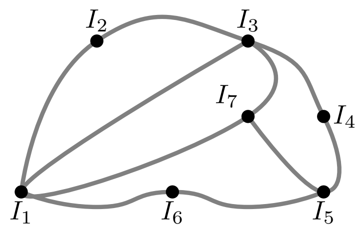
Assim temos que devem ser construídos blocos para as seguintes modalidades:

- Modalidade E (não é compatível com qualquer outra).
- Modalidades B e G.
- Modalidades H e D.
- Modalidades A, C e F.

Assim, temos que é necessário construir, no mínimo quatro blocos.

Exame – 2016, 2ª Fase

9. De acordo com a imagem obtemos o grafo da figura ao lado, em que cada vértice representa uma infraestrutura e cada aresta representa um troço pedonal.



Determinando o grau de cada vértice, temos:

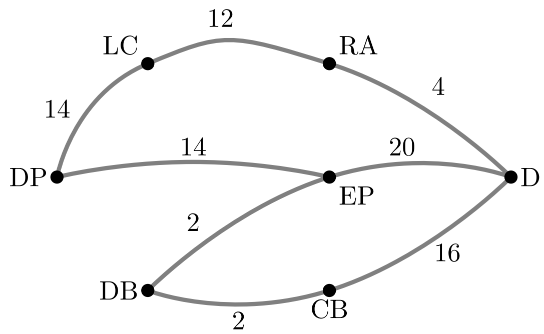
Vértices	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7
Grau	4	2	4	2	3	2	3

Desta forma, como existem dois vértices com grau ímpar (os vértices I_5 e I_7), o grafo não admite circuitos de Euler, ou seja, circuitos que percorram todas as arestas, percorrendo cada aresta uma única vez. No contexto da situação descrita significa que não é possível percorrer todos os troços pedonais sem repetir nenhum iniciando e terminando a vistoria junto da mesma infraestrutura, ou seja, a conclusão do vigilante é verdadeira.

Considerando a duplicação da aresta que une os vértices I_5 e I_7, todos os vértices ficarão com grau par, o que significa que é possível identificar um circuito de Euler no grafo, ou seja, o troço pedonal a repetir pelo vigilante, que lhe permita percorrer todos os troços, iniciando e terminando a vistoria junto da mesma infraestrutura é o troço que une as infraestruturas I_5 e I_7.

Exame – 2016, 1ª Fase

10. De acordo com as informações da tabela podemos desenhar o grafo da figura ao lado, em que cada vértice representa uma infraestrutura tarefa, cada aresta representa uma relação de precedência a ponderação, em cada aresta representa o tempo necessário para a execução da tarefa da esquerda (e o tempo de espera necessário para a tarefa da direita).



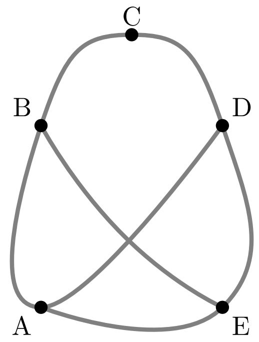
Assim podemos verificar que podem ocorrem quatro sequências de tarefas:

- DP → LC → RA → D, com um tempo associado de $14 + 12 + 4 = 30$ minutos
- DP → EP → D, com um tempo associado de $14 + 20 = 34$ minutos
- DB → EP → D, com um tempo associado de $2 + 20 = 22$ minutos
- DB → CB → D, com um tempo associado de $2 + 16 = 18$ minutos

Como cada uma das sequências de tarefas pode decorrer simultaneamente, o tempo mínimo, em minutos, necessário para realizar todas as tarefas que antecedem uma nova descolagem do avião, nas condições previstas na tabela anterior é 34 minutos, correspondente ao tempo necessário para a concretização da sequência com maior duração.

Exame – 2015, Ép. especial

11. De acordo com as informações da tabela podemos desenhar o grafo da figura ao lado, em que cada vértice representa uma cidade e cada aresta representa uma ligação rodoviária existente.



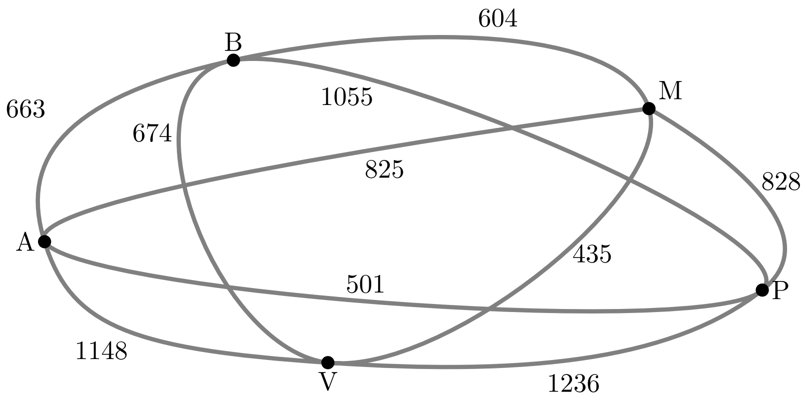
Identificando todos os percursos possíveis em cada alternativa, temos:

- **alternativa 1 :**
  - C → B → **A** → **E** → D → C
  - C → D → **A** → **E** → B → C
- **alternativa 2 :**
  - C → **D** → E → A → **B** → C
  - C → **D** → A → E → **B** → C

Como em ambas as alternativas é possível definir o mesmo número de percursos (dois percursos em cada alternativa), o Sr. Pereira não tem razão.

Exame – 2015, 2ª Fase

12. Usando a informação da tabela obtemos o grafo da figura seguinte:



Aplicando o algoritmo indicado, obtemos a seguinte seleção de arestas:

I- Aresta M-V (435 km)
II- Aresta A-P (501 km)
III- Aresta B-M (604 km)
IV- Aresta A-B (663 km)
(não se considera a aresta B-V, porque se encontrariam três arestas no vértice B)
(não se consideram as arestas A-M, e M-P porque se encontrariam três arestas no vértice M)
(não se considera a aresta B-P, porque se encontrariam três arestas no vértice B)
(não se considera a aresta A-V, porque se encontrariam três arestas no vértice A)
V- Aresta P-V (1236 km)

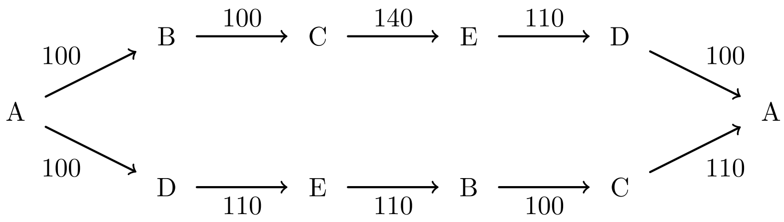
Assim, um possível percurso final definido pelo funcionário, com início e fim em Amesterdão (A), é:

$$A \rightarrow P \rightarrow V \rightarrow M \rightarrow B \rightarrow A$$

(o mesmo percurso em sentido inverso também satisfaz as condições do enunciado).

Exame – 2015, 1ª Fase

13. Definindo os circuitos possíveis compatíveis com o algoritmo definido, considerando a escolha aleatória da primeira vivenda (B ou D), temos:



Assim, temos que a distância total de cada percuso é:

- Percurso A $\rightarrow$ B $\rightarrow$ C $\rightarrow$ E $\rightarrow$ D $\rightarrow$ A: $100 + 100 + 140 + 110 + 100 = 550$ metros
- Percurso A $\rightarrow$ D $\rightarrow$ E $\rightarrow$ B $\rightarrow$ C $\rightarrow$ A: $100 + 110 + 110 + 100 + 110 = 530$ metros

Logo, aplicando o algoritmo, a escolha aleatória, quando existem duas vivendas à mesma distância, pode levar o Francisco a percorrer uma distância maior do que seria necessário se optar pela vivenda B na primeira escolha.

Exame – 2014, 2ª Fase

14. Ordenando as distâncias entre os sete pavilhões registadas na tabela, temos:

$$\underset{A3-A5}{100} < \underset{A3-A4}{150} < \underset{A2-A3}{190} < \underset{A2-A5}{200} < \underset{A4-A5}{220} = \underset{A5-A6}{220} < \underset{A4-A6}{240} < \underset{A2-A6}{340} < \underset{A1-A7}{350} < \underset{A1-A2}{500} < \underset{A6-A7}{650} < \underset{A1-A6}{730}$$

Aplicando o algoritmo indicado, obtemos a seguinte seleção de arestas e o grafo da figura seguinte:

I- Aresta A3-A5 (100 m)

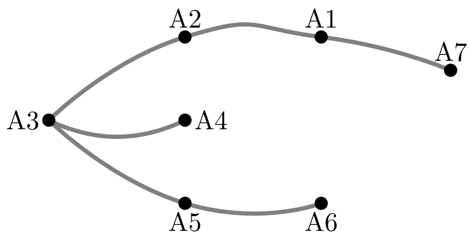
II- Aresta A3-A4 (150 m)

III- Aresta A2-A3 (190 m)
(não se consideram as aresta A2-A5 e A4-A5, porque levariam à formação de circuitos)

IV- Aresta A5-A6 (220 m)
(não se consideram as aresta A4-A6 e A2-A6, porque levariam à formação de circuitos)

V- Aresta A1-A7 (350 m)

VI- Aresta A1-A2 (500 m)



Como o número de arestas selecionadas é igual ao número de vértices menos um $(7 - 1 = 6)$, o algoritmo termina e o número mínimo de metros de cabo de fibra ótica necessários, é:

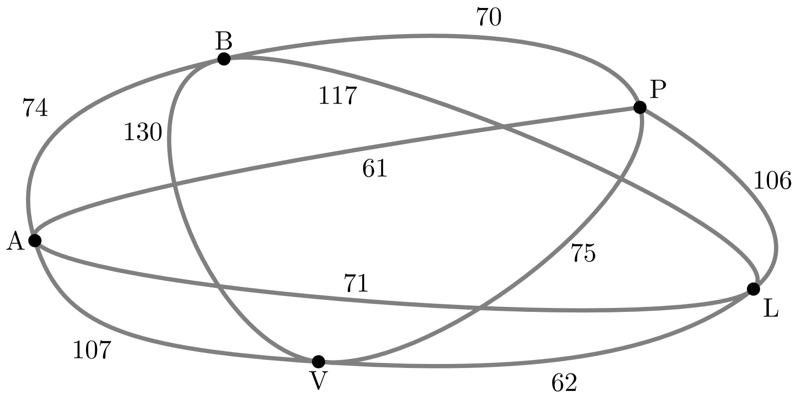
$$100 + 150 + 190 + 220 + 350 + 500 = 1510 \text{ metros}$$

Como a instalação de cabo de fibra ótica custa 3,40 euros por metro, o custo mínimo da instalação do cabo de fibra ótica, é:

$$1510 \times 3{,}40 = 5134 \text{ euros}$$

Exame – 2014, 1ª Fase

15. Usando a informação da tabela obtemos o grafo da figura seguinte:



Aplicando o algoritmo indicado na opção 1, obtemos a seguinte percurso:

$$\text{Amarante} \xrightarrow{61} \text{Porto} \xrightarrow{70} \text{Braga} \xrightarrow{117} \text{Lamego} \xrightarrow{62} \text{Viseu} \xrightarrow{107} \text{Amarante}$$

Aplicando o algoritmo indicado na opção 2, temos que a ordenação das distâncias entre as cidades, registadas na tabela, é:

$$\underset{A-P}{61} < \underset{L-V}{62} < \underset{B-P}{70} < \underset{A-L}{71} < \underset{A-B}{74} < \underset{P-V}{75} < \underset{P-L}{106} < \underset{A-V}{107} < \underset{B-L}{117} < \underset{B-V}{130}$$

Selecionado os pares de cidades de acordo com o algoritmo, temos:

I- Amarante-Porto (61 km)

II- Lamego-Viseu (62 km)

III- Braga-Porto (70 m)

IV- Amarante-Lamego (71 km)

(não se considera o par Amarante-Braga porque Amarante apareceria três vezes)

(não se consideram os pares Porto-Viseu, nem Porto-Lamego, porque Porto apareceria três vezes)

(não se considera o par Amarante-Viseu porque Amarante apareceria três vezes)

(não se considera o par Braga-Lamego porque Lamego apareceria três vezes)

IV- Braga-Viseu (130 km)

Assim, obtemos a seguinte percurso:

$$\text{Amarante} \xrightarrow{61} \text{Porto} \xrightarrow{70} \text{Braga} \xrightarrow{130} \text{Viseu} \xrightarrow{62} \text{Lamego} \xrightarrow{71} \text{Amarante}$$

Logo temos que o número total de quilómetros percorridos em cada uma das duas opções, é:

- Opção 1: $61 + 70 + 117 + 62 + 107 = 417$ km
- Opção 2: $61 + 70 + 130 + 62 + 71 = 394$ km

Pelo que podemos concluir que o Luís não tem razão, porque o percurso escolhido através do algoritmo da versão é o que tem um número inferior de quilómetros.

Exame – 2013, Ép. especial