ESCOLA SECUNDÁRIA DE ALCÁCER DO SAL

Teste de Avaliação

12º A 21/05/2007 Ano Lectivo de 2006/2007

Grupo I

- As cinco questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas, a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. O Joaquim fará este ano exame em 5 disciplinas. Pode realizar os 5 exames em qualquer uma das duas fases. Na organização do seu estudo, o Joaquim, decidiu que fará apenas 5 exames – um de cada uma das disciplinas. Agora está a decidir em que fase fará cada um dos exames. Quantas são as opções possíveis?

(A) ${}^5C_2$ **(B)** ${}^5A_2$ **(C)** 5^2 **(D)** 2^5

2. Sejam a, b e k números reais ($k > 1$) tais que $\log_k a = b$.

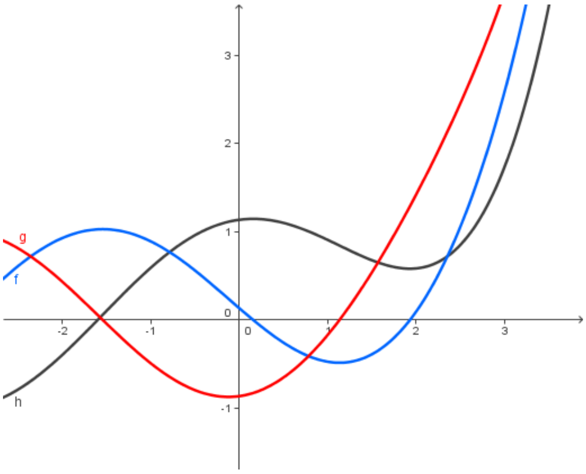
Qual das seguintes expressão é igual a k^{a+b}?

(A) $a \cdot k^a$ **(B)** $a \cdot k^b$

(C) $b \cdot k^a$ **(D)** $b \cdot k^b$

3. Considere as funções f, g e h, todas de domínio $\mathbb{R}$, cujos gráficos estão parcialmente representados na figura seguinte.

Para uma identificação mais eficaz note que $h(0) > f(0) > g(0)$.



Qual das seguintes afirmações é necessariamente falsa?

(A) $f(x) = h'(x)$, ou seja, a derivada da função h é a função f

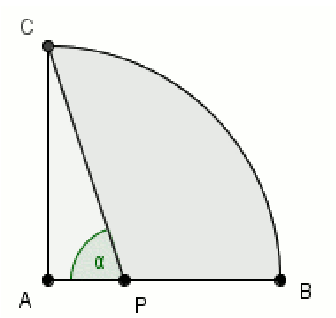
(B) $g(x) = f'(x)$, ou seja, a derivada da função f é a função g

(C) $g(x) = h''(x)$, ou seja, a segunda derivada da função h é a função g

(D) $h(x) = f''(x)$, ou seja, a segunda derivada da função f é a função h

4. Considere a figura ao lado na qual se representa:

- um quarto de circunferência de centro em A, e raios $[AB]$ e $[AC]$
- $\overline{AB} = 2$
- α é a medida do ângulo $\sphericalangle APC$, $\alpha \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$



O ponto P desloca-se sobre o segmento $[AB]$ (fazendo variar o ângulo α). Qual das seguintes expressões dá a área da zona sombreada em função de α?

(A) $\dfrac{\pi - 2}{\operatorname{tg} \alpha}$ **(B)** $\dfrac{\pi \cdot \operatorname{tg} \alpha - 2}{\operatorname{tg} \alpha}$ **(C)** $\pi - 2 \cdot \cos \alpha$ **D)** $\pi - \dfrac{2}{\cos \alpha}$

5. Seja $w=5+3i$ um número complexo e considere que $\arg(w)\in[0,2\pi[$.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) $0<\arg(w)<\frac{\pi}{6}$

(B) $\frac{\pi}{6}<\arg(w)<\frac{\pi}{4}$

(C) $\frac{\pi}{4}<\arg(w)<\frac{\pi}{3}$

(D) $\frac{\pi}{3}<\arg(w)<\frac{\pi}{2}$

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é apresentada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Numa caixa estão 28 peças de xadrez. Sabe-se que todas as 16 peças brancas estão na caixa (8 peões e as restantes 8) e o total de peões é 13.

1.1 Qual é a probabilidade de retirar ao acaso uma peça da caixa e seleccionar uma peça branca que não seja um peão (apresente o resultado sob a forma de fracção irredutível)?

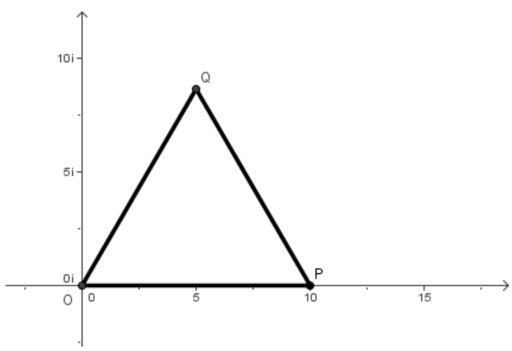
1.2 Se através do tacto escolhermos uma peça com a forma de um peão, qual é a probabilidade de ela ser preta (apresente o resultado sob a forma de percentagem arredondado às unidades)?

2. Seja $z=-3+\sqrt{3}\cdot i$.

2.1 **Sem recorrer à calculadora gráfica**, determine $\frac{z}{2\sqrt{3}\operatorname{cis}(\pi)}+\operatorname{cis}\left(\frac{7\pi}{6}\right)$

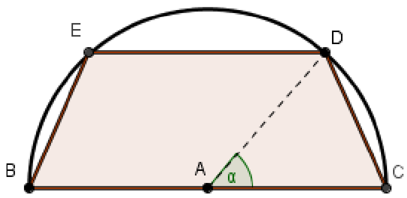
e apresente o resultado na forma trigonométrica.

2.2 Considere um triângulo equilátero $\triangle[OPQ]$ cuja medida dos lados é 10 e cujo vértice O coincide com a origem, o lado $[OP]$ pertence ao semi-eixo horizontal positivo e Q está no primeiro quadrante.



Averigúe se o afixo do número complexo $z\times(-2i)$ está sobre o lado $[OQ]$ do triângulo.

3. Considere a figura ao lado, na qual se representa uma semicircunferência de centro em A e de raio 1. α designa o ângulo $\sphericalangle CAD$ e $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.



O ponto D move-se sobre a semicircunferência e o ponto E acompanha esse movimento de forma que os segmentos $[ED]$ e $[BC]$ são sempre paralelos.

3.1 Mostre que a área do trapézio $[CBED]$ é dada pela expressão $\mathrm{A}(\alpha) = \operatorname{sen}(\alpha) + \operatorname{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$. (sugestão: considere o triângulo rectângulo $\triangle[APD]$ com P sobre o segmento $[AC]$).

3.2 Calcule $\lim_{\alpha \to \frac{\pi}{2}^-} A(\alpha)$ e interprete geometricamente o valor obtido.

3.3 Recorrendo ao teorema de Bolzano-Cauchy prove que existe um ângulo β maior que $\frac{\pi}{6}$ e menor que $\frac{\pi}{4}$, para o qual a área do trapézio $[CBED]$ é 1.

	Questões	Cotações
Grupo I	....	65
	Cada resposta correcta...	13
	Cada resposta errada, anulada ou não respondida.............	0
Grupo II	....	135
	1..	33
	1.1..	16
	1.2..	17
	2..	40
	2.1..	18
	2.2..	22
	3..	62
	3.1..	22
	3.2..	20
	2.3..	20

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r \quad (\alpha - amplitude,\ em\ radianos,\ do\ \hat{a}ngulo\ ao\ centro;\ \ r - raio)$

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\,maior \times Diagonal\,menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\,maior + Base\,menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: $Semiperímetro \times Apótema$

Sector circular: $\frac{\alpha\, r^2}{2}$ $(\alpha - amplitude,$ $em\ radianos,\ do\ \hat{a}ngulo\ ao\ centro;\ \ r - raio)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
$(r - raio\ da\ base;\ g - geratriz)$

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
$(r - raio)$

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Cone: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3 \qquad (r - raio)$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} b \,.\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho\, cis\, \theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\, \theta} = \sqrt[n]{\rho}\ cis\ \frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, \ldots, n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u' . v + u . v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' . v - u . v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\,u^{n-1}\,.\,u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' . \cos u$

$(\cos u)' = -\,u' . \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' . e^u$

$(a^u)' = u' . a^u . \ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\,\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$