ESCOLA SECUNDÁRIA DE ALCÁCER DO SAL

Teste de Avaliação

12º C 22/05/2007 Ano Lectivo de 2006/2007

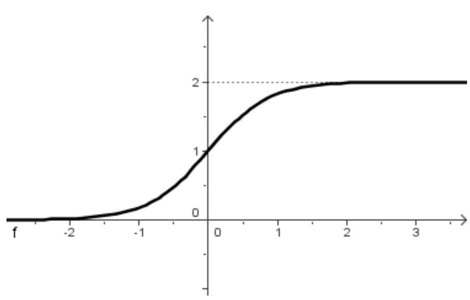
Grupo I

- As cinco questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas, a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Um professor de Matemática tem duas turmas (A e C). No final do ano analisou os resultados dos testes das duas turmas separadamente e concluiu que as duas distribuições eram aproximadamente normais e ambas tinham média de 12,7 valores. Já o desvio padrão da turma A era de 2,1 valores e o da turma C de 3,8 valores.
Qual dos seguintes acontecimentos é mais provável?

(A) Seleccionar ao acaso um teste da turma A e ter nota inferior a 10
(B) Seleccionar ao acaso um teste da turma C e ter nota inferior a 10
(C) Seleccionar ao acaso um teste da turma A e ter nota superior a 10
(D) Seleccionar ao acaso um teste da turma C e ter nota superior a 10

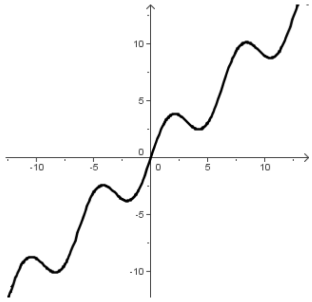
2. Considere a sucessão $u_n = \dfrac{10}{\log n}$ e a função f, de domínio $\mathbb{R}$, cuja representação gráfica está na figura ao lado, em que $f(0) = 1$.



Qual o valor de $\lim f(u_n)$?

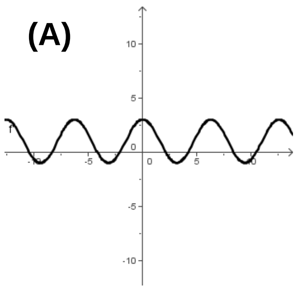
(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** $+\infty$

3. Considere a função real de variável real f cuja representação gráfica é a seguinte:

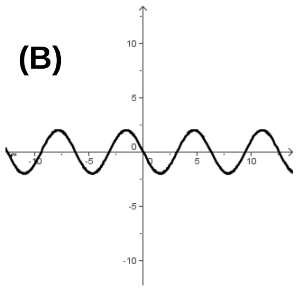


Qual das seguintes representações gráficas pode ser a de f'', segunda derivada da função f?

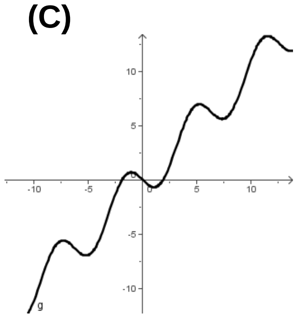
(A)



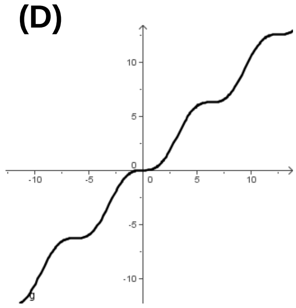
(B)



(C)

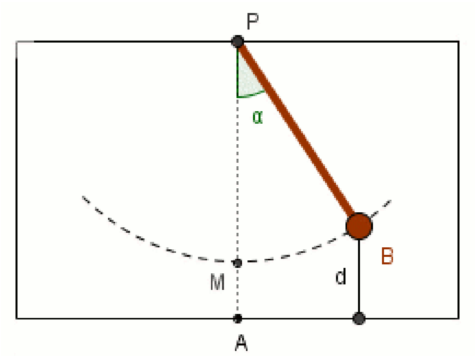


(D)



4. Considere a figura ao lado na qual se representa:

- um pêndulo B que oscila suspenso no ponto P, tal que $\overline{BP} = 4$
- $\overline{PA} = 5$ e $\overline{MA} = 1$
- α é a medida do ângulo $\measuredangle APB$, $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$



Seja d a distância do ponto B ao solo.

Qual das seguintes expressões representa a variação de d em função de α?

(A) $4 \cdot \text{sen}\,\alpha + 5$ **(B)** $5 - 4 \cdot \text{sen}\,\alpha$

(C) $4 \cdot \cos\alpha + 1$ **(D)** $5 - 4 \cdot \cos\alpha$

5. Seja $w = \rho \text{ cis } \frac{10\pi}{7}$ um número complexo em que $\rho \in \mathbb{R}^+$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) $\text{Re}(w) > 0$ e $\text{Im}(w) > 0$

(B) $\text{Re}(w) > 0$ e $\text{Im}(w) < 0$

(C) $\text{Re}(w) < 0$ e $\text{Im}(w) > 0$

(D) $\text{Re}(w) < 0$ e $\text{Im}(w) < 0$

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é apresentada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. O Joaquim irá apresentar o seu trabalho da disciplina de Área de Projecto com as três colegas de grupo, a Marta, a Núria e a Olga. A apresentação tem cinco pontos, pelo que ficou decidido que cada rapariga irá apresentar um ponto e o Joaquim dois. Para sortear a sequência de apresentação foram colocados 5 números num saco, tendo o Joaquim retirado 2 números e as colegas um número cada, correspondendo cada número a um ponto da apresentação que será feita por ordem crescente dos pontos.

1.1 Quantas sequências de apresentação distintas é possível definir?

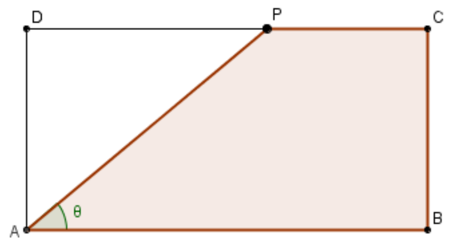
1.2 Considere a variável aleatória X: «Nº do ponto que o Joaquim apresentará em primeiro lugar». Construa a distribuição de probabilidades da variável X (sugestão: considere todos os pares de números que o Joaquim pode retirar).

2. Seja $z = \sqrt{2} \text{ cis } \frac{\pi}{12}$.

2.1 **Sem recorrer à calculadora gráfica**, determine $(3+3i)\cdot z - 3$ e apresente o resultado na forma trigonométrica.

2.2 Seja $w = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. Quais os valores que a e b podem tomar para que $z^2 + 2\cdot w$ seja número real negativo.

3. Considere o rectângulo $[ABCD]$ cujos lados medem 2 e 4 $u.m.$ e o ponto P que se desloca sobre o lado $[CD]$. Seja θ o ângulo $\measuredangle BAP$.



3.1 Se o ponto P coincidir com o ponto C, indique um valor (aproximado às centésimas de radiano) para o ângulo θ associado e indique o valor máximo que o ângulo θ pode atingir, justificando as suas respostas.

3.2 Mostre que o perímetro do trapézio rectângulo $[APCB]$ varia em função de θ de acordo com a expressão $\mathrm{P}(\theta)=10+\dfrac{2}{\operatorname{sen}(\theta)}-\dfrac{2}{\operatorname{tg}(\theta)}$.

3.3 Mostre que a derivada da expressão anterior é $\mathrm{P}'(\theta)=\dfrac{2-2\cos(\theta)}{\operatorname{sen}^2(\theta)}$ e justifique que a função P é crescente para os valores de θ em causa.

	Questões	Cotações
Grupo I	....	65
	Cada resposta correcta..	13
	Cada resposta errada, anulada ou não respondida.............	0
Grupo II	....	135
	1..	33
	1.1...	16
	1.2...	17
	2..	40
	2.1...	20
	2.2...	20
	3..	62
	3.1...	18
	3.2...	22
	2.3...	22

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ $\quad$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\, maior \times Diagonal\, menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\, maior + Base\, menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: $Semiperímetro \times Apótema$

Sector circular: $\frac{\alpha\, r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(r – *raio da base;* g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Cone: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ $\quad$ (r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} b \,.\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho\, cis\, \theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\, \theta} = \sqrt[n]{\rho}\ cis\, \frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, \ldots, n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\,v + u\,.\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\,v - u\,.\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\,u^{n-1}\,.\,u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -\,u'.\operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\,e^u$

$(a^u)' = u'.\,a^u.\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$