Matemática A - 12º Ano

Resolução do Teste de Avaliação 1 - AEAS

Ano Lectivo de 2013/2014

Nuno Miguel Guerreiro
pt.linkedin.com/in/nunomiguelguerreiro

Grupo I

1. O Joaquim tem no bolso cinco moedas de 1 euro e seis moedas de 2 euros.
   De forma a retirar do seu bolso, ao acaso, duas moedas de valor conjunto igual a 3 euros, o Joaquim necessita de retirar uma moeda de 1 euro e uma moeda de 2 euros, pelo que a probabilidade referente a este acontecimento é dada por:
   $$\frac{5}{11} \times \frac{6}{10} \times 2 = \frac{6}{11}$$
   Resposta Correcta: (B)

2. Foi lançado um dado cúbico as faces numeradas de 1 a 6 e retirada uma carta, ao acaso, de um baralho completo de 52 cartas.
   A probabilidade de se lançar o dado e a face voltada para cima ter o número 5 é de $\frac{1}{6}$ e, havendo quatro cartas com o número 5 num baralho completo, a probabilidade de se retirar, ao acaso, uma carta e esta ter o número 5 é $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$, logo, a probabilidade de nem a carta nem o dado terem o número 5 é dada por:
   $$\left(1 - \frac{1}{6}\right) \times \left(1 - \frac{1}{13}\right) = \frac{10}{13}$$
   Resposta Correcta: (A)

3. Considerando A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$), tendo $P(A \cup B) = 0,5$ podemos concluir que:
   $$P(A \cap B) = P(A) + \underbrace{P(B)}_{P(B)=0,3} - \underbrace{P(A \cap B)}_{P(B)-P(\overline{A} \cap B)} = 0,5$$
   Substituindo pelos valores dados no enunciado vem:
   $$P(A) + 0,3 - (0,3 - 0,1) = 0,5 \Leftrightarrow P(A) = 0,4$$
   Resposta Correcta: (D)

4. Considerando A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$) tais que $A \cap B \neq \emptyset$.
   O valor da probabilidade condicionada $P\big((A \cup B)|(A \cap B)\big)$ é dado por:
   $$P\big((A \cup B)|(A \cap B)\big) = \frac{\overbrace{P\big((A \cup B) \cap (A \cap B)\big)}^{P(A \cap B)}}{P(A \cap B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B)} = 1$$
   Resposta Correcta: (D)

5. Considerando os acontecimentos *Q:"O Joaquim tem positiva no teste de Química"* e *C:"O Joaquim fica sentado ao lado do Cristiano no teste de Química"* analisemos a afirmação:

   "Quando o Joaquim fica sentado ao lado do Cristiano, nos testes de Química, a probabilidade de ter positiva no teste, é maior do que ter positiva nos testes de Química numa situação normal!"

   Sabe-se que C acontece e conclui-se que neste caso, a probabilidade de o Joaquim ter positiva no teste é maior do que numa situação normal, isto é, maior que acontecer Q, logo $P(Q|C) > P(Q)$.

   Resposta Correcta: (A)

Grupo II

1. Num saco estão 9 bolas indistinguíveis ao tacto. As bolas estão numeradas e são de 3 cores diferentes:

   - 2 bolas amarelas numeradas de 1 a 2;
   - 3 bolas brancas numeradas de 1 a 3;
   - 4 bolas castanhas numeradas de 1 a 4

   1.1. Tendo em conta a experiência aleatória que consiste em extrair, ao acaso, uma bola do saco e os acontecimentos *A:"A bola tem um número ímpar"* e *B:"A bola não tem cor branca"*, pretende-se calcular $P(A \cup B)$.
   Ora sendo $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, calculem-se estas probabilidades vindo $P(A) = \frac{5}{9}$ pois existem cinco bolas ímpares no saco de 9 bolas, $P(B) = \frac{2}{3}$ pois existem seis bolas não brancas no saco de 9 bolas e $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ pois existem três bolas ímpares e não brancas no saco de 9 bolas.
   Conclui-se então:

   $$P(A \cup B) = \frac{5}{9} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{8}{9}$$

   1.2. Considere-se agora a experiência aleatória que consiste em retirar do saco, ao acaso, duas bolas simultaneamente.
   Pretendemos calcular a probabilidade das duas bolas retiradas terem a mesma cor, logo, os casos favoráveis são as saídas AA, BB e CC vindo então que a probabilidade é dada por:

   $$\underbrace{\frac{2}{10} \times \frac{1}{9}}_{\text{duas bolas amarelas}} + \underbrace{\frac{3}{10} \times \frac{2}{9}}_{\text{duas bolas brancas}} + \underbrace{\frac{4}{10} \times \frac{3}{9}}_{\text{duas bolas castanhas}} = \frac{2}{9}$$

2. Numa turma de 12º ano constituída por 24 alunos, 16 dos alunos têm instalado o sistema Android.
   Tendo em conta os acontecimentos *A: Ter um telemóvel com sistema operativo Android* e *F: Ter a aplicação do facebook instalada no telemóvel*, pode-se concluir que $P(A) = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$.
   Como $\frac{3}{4}$ dos telemóveis com Android, têm a aplicação do facebook instalada tem-se que $P(F|A) = \frac{3}{4}$ e, como 2 telemóveis não têm sistema operativo Android, nem têm a aplicação do Facebook instalada tem-se $P(\overline{F} \cap \overline{A}) = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$.

   2.1. Pretende-se averiguar se A e F são acontecimentos independentes, isto é, se

   $$P(A \cap F) = P(A) \times P(F)$$

   Sabe-se que $P(F|A) = \frac{2}{3}$ logo vem:

   $$P(F|A) = \frac{P(A \cap F)}{P(A)} = \frac{P(A \cap F)}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}$$

   de onde vem facilmente $P(A \cap F) = \frac{1}{2}$.
   Ora tem-se neste momento as condições necessárias para preencher a tabela de probabilidades podendo concluir que $P(F) = \frac{3}{4}$ e então:

	A	$\overline{A}$	TOT
F	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$\overline{F}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
TOT	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

   $$P(A) \times P(F) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2} = P(A \cap F)$$

   Logo A e F são acontecimentos independentes.

   2.2. A probabilidade de um telemóvel ter sistema operatico Android se for escolhido, ao acaso, de entre os que têm a aplicação do facebook instalada é dada por $P(A|F)$.
   Desta forma vem:

   $$P(A|F) = \frac{P(A \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

3. De acordo com a Regra de Laplace, a probabilidade é calculada pelo quociente do número de casos favoráveis pelo número de casos possíveis, sendo os casos possíveis equiprováveis. Devemos então calcular os casos possíveis e os casos favoráveis de forma a calcular $P(\overline{V_2}|V_1)$, isto é, no contexto do problema, a probabilidade de sabendo que saiu carta vermelha na primeira extração, sair carta preta na segunda extração.

   Ora no primeiro monte estão as 12 figuras e o ás de copas estando então 7 cartas vermelhas e 6 cartas pretas. Sabendo que saiu carta vermelha na primeira extração, de acordo com a experiência aleatória, retira-se aleatoriamente uma segunda carta do primeiro monte.
   Desta forma o número de casos possíveis é 13 pois existem 13 cartas no primeiro monte e o número de casos favoráveis é 6 pois existem 6 cartas pretas no primeiro monte, logo, pela Lei de Laplace, temos:

$$P(\overline{V_2}|V_1) = \frac{6}{13}$$

4. Considerando A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$) vem que a igualdade abaixo se verifica:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{B}) - P(A \cap \overline{B})$$

   Demonstremos então a igualdade:

$$\begin{array}{rll|l} P(\overline{A} \cap \overline{B}) = & P(\overline{A \cup B}) & & (1) \\ = & 1 - P(A \cup B) & & (2) \\ = & 1 - \big(P(A) + P(B) - P(A \cap B)\big) & & (3) \\ = & 1 - P(B) - \big(P(A) - P(A \cap B)\big) & & (4) \\ = & P(\overline{B}) - P(A \cap \overline{B}) & & \end{array}$$

(1) Lei de De Morgan: $P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B})$
(2) Teorema $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
(3) Teorema $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
(4) Teorema $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$

■