Matemática A - 12º Ano

Resolução do Teste de Avaliação 2 - AEAS

Nuno Miguel Guerreiro
pt.linkedin.com/in/nunomiguelguerreiro

Grupo I

1. Considerando os acontecimentos:

   - *A: A letra seleccionada é a letra A*
   - *O: A letra seleccionada é a letra O*
   - *V: A letra seleccionada é uma vogal*

   A probabilidade que é pedida é $P[(A \cup O)|V] = \frac{1}{2}$, isto é, a probabilidade de escolhendo uma e tendo em conta apenas as vogais, metade destas serem ou a letra A ou a letra O.
   Ora analisando cada palavra verificamos que a palavra "FAMÍLIAS"tem quatro vogais, duas das quais são a vogal "A"verificando-se então $P[(A \cup O)|V] = \frac{1}{2}$.

   Resposta Correcta: (C)

2. O Joaquim leu os sete livros que recebeu no Natal passado sendo três destes de autores estrangeiros. Os livros de autores estrangeiros foram todos lidos de forma seguida pelo que então podem ter sido lidos de 3! sequências diferentes. Os restantes livros podem ter sido lidos de 4! sequências diferentes.
   Considerando que as 3 sequências diferentes foram lidas de forma seguida, existem ${}^5C_1 = 5$ formas de dispôr estas sequências de forma seguida, vindo então que as sequências de leitura possíveis são:

   $${}^5C_1 \times 3! \times 4! = 3! \times 5!$$

   Resposta Correcta: (D)

3. Tenha-se em conta a propriedade: ${}^nC_p + {}^nC_{p+1} = {}^{n+1}C_{p+1}$.
   Ora tendo em conta que ${}^nC_{p-1} + {}^nC_p = {}^{n+1}C_p$ e ${}^nC_p + nC_{p+1} = {}^{n+1}C_{p+1}$ vem:

   $${}^{n+1}C_p + {}^{n+1}C_{p+1} = {}^nC_{p-1} + {}^nC_p + {}^nC_p + {}^nC_{p+1} = {}^nC_{p-1} + 2 \times {}^nC_p + {}^{n+1}C_{p+1}$$

   Resposta Correcta: (D)

4. O desenvolvimento de $(a+b)^n$ é um polinómio reduzido em que um dos termos é ka^6b^2.
   O desenvolvimento de $(a+b)^n$ pelo Binómio de Newton é ${}^nC_k \times a^{n-k} \times b^k$. Como o termo que procuramos é da forma ka^6b^2 temos que $k=2$ e portanto, sendo $n-k=6$, vem $n=8$, logo tem-se:

   $${}^8C_2 \times a^6b^2 = 28\, a^6b^2$$

   Resposta Correcta: (C)

5. Considerando um conjunto de 6 cartas (4 de espadas e 2 de paus) e a experiência que consiste em retirar simultaneamente 3 cartas deste conjunto. Sendo a variável aleatória X definida por *X:"número de cartas de espadas no conjunto das 3 escolhidas"*, tem-se que X pode tomar valores $X = 1$, $X = 2$ e $X = 3$ (repare que só existem 2 cartas de paus pelo que $X = 0$ não pode ser um valor a considerar).
   Calculando os valores de probabilidade para cada valor de X vem:

   $$P(X=1) = \frac{{}^2C_2 \times 4}{{}^6C_3} = \frac{4}{{}^6C_3} \qquad P(X=2) = \frac{2 \times {}^4C_2}{{}^6C_3} \qquad P(X=3) = \frac{{}^4C_3}{{}^6C_3} = \frac{4}{{}^6C_3}$$

   Resposta Correcta: (A)

Grupo I

1. Uma árvore de natal foi decorada só com fitas e bolas. Tanto as fitas como as bolas são todas brancas ou vermelhas. Considerem-se os acontecimentos seguintes em relação à experiência aleatória que consiste em seleccionar, ao acaso, uma decoração desta árvore:

   - *F: Seleccionar uma fita*
   - *W: Seleccionar uma decoração branca*

   Sabe-se então do enunciado que $P(F \cap W) = \frac{2}{5}$, $P(\overline{F}) = \frac{2}{5}$ e $P(W) = P(\overline{W}) = \frac{1}{2}$.

   1.1. Pretende-se averiguar se F e W são acontecimentos independentes, isto é, se se verifica a hipótese $P(F \cap W) = P(F) \times P(W)$.
   Sabe-se que $P(F \cap W) = \frac{2}{5}$ e que $P(W) = \frac{1}{2}$ pelo que deve-se determinar o valor de $P(F)$.
   Sendo $P(\overline{F}) = 1 - P(F) = \frac{2}{5}$ vem $P(F) = \frac{3}{5}$ e então vem:

   $$P(W) \times P(F) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10} \neq \frac{2}{5} = P(F \cap W)$$

   Conclui-se que F e W não são acontecimentos independentes.

   1.2. A probabilidade de seleccionar ao acaso uma decoração vermelha e esta ser uma bola é dada por $P(\overline{F}|\overline{W})$.
   Sendo $P(W) = P(F \cap W) + P(\overline{F} \cap W)$ tem-se para $P(W) = \frac{1}{2}$ e $P(F \cap W) = \frac{2}{5}$, $P(\overline{F} \cap W) = \frac{1}{10}$.
   Sendo $P(\overline{F}) = P(\overline{F} \cap W) + P(\overline{F} \cap \overline{W})$ tem-se para $P(\overline{F}) = \frac{2}{5}$ e $P(\overline{F} \cap W) = \frac{1}{10}$, $P(\overline{F} \cap \overline{W}) = \frac{3}{10}$.
   Desta forma vem:

   $$P(\overline{F}|\overline{W}) = \frac{P(\overline{F} \cap \overline{W})}{P(\overline{W})} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{5}$$

   Conclui-se então que a probabilidade de seleccionar, ao acaso uma decoração vermelha, e esta ser uma bola é dada por $\frac{3}{5}$.

2. Considerando A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$) vem que para $P(A) = P(B)$ a igualdade abaixo se verifica:

   $$P(A) \times P(A|B) = P(A) - P(A \setminus B)$$

   Demonstremos então a igualdade:

   $$\begin{aligned} P(A) - P(A \setminus B) &= P(A) - P(A \cap \overline{B}) && (1) \\ &= P(A) - \big(P(A) - P(A \cap B)\big) && (2) \\ &= P(A \cap B) \end{aligned}$$

   (1) Probabilidade de A exceto B é dada por $P(A \cap \overline{B})$
   (2) Teorema $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$

   $$\begin{aligned} P(A) \times P(A|B) &= P(A) \times \frac{P(A \cap B)}{P(B)} && (3) \\ &= P(A) \times \frac{P(A \cap B)}{P(A)} && (4) \\ &= P(A \cap B) \end{aligned}$$

   (3) Teorema $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
   (4) Hipótese $P(A) = P(B)$

   Conclui-se então o pretendido, isto é, caso $P(A) = P(B)$, então $P(A) \times P(A|B) = P(A) - P(A \setminus B)$.

3. Dez amigos combinaram fazer um jantar de natal e todos estes têm namorada. A probabilidade de cada uma das namoradas ir ao jantar é aproximadamente 75%.

   3.1. A probabilidade de irem ao jantar mais do que 17 pessoas é igual à probabilidade de pelo menos 7 namoradas irem ao jantar.
   Devemos então calcular a probabilidade de sete, oito, nove e dez namoradas irem ao jantar de forma a encontrar o valor pedido, vindo:

   $$P = {}^{10}C_7 \times (0,75)^7 \times (0,25)^3 + {}^{10}C_8 \times (0,75)^8 \times (0,25)^2 + {}^{10}C_9 \times (0,75)^9 \times (0,25)^1 + (0,75)^{10} \approx 0,776$$

   Conclui-se então que a probabilidade de irem ao jantar mais do que 17 pessoas é $0,776$, com arredondamento às milésimas.

   3.2. Depois do jantar, em que compareceram, exactamente 18 pessoas (10 amigos e 8 namoradas), decidiram tirar uma foto.
   Tendo em conta que os namorados ficarão na fila de trás e as namoradas na fila da frente, e sabendo que cada namorada tem a sua namorada à frente, temos 8! maneiras diferentes de dispôr as namoradas e 1 só disposição para os namorados destas.
   Estando 2 rapzes sem parceira e situando-se nos extremos da fila de trás, então existem 2! maneiras de se colocarem na foto.
   Conclui-se então que o número de disposições possíveis para a fotografia é:

   $$2! \times 8! = 80640$$

4. O Joaquim vai fazer presentes de Natal para oferecer e comprou oito tipos de bolachas e vai colocar 4 em cada cesto.
   As bolachas não estão em compartimentos individualizados pelo que a ordem da disposição não é relevante. Sabe-se também que o Joaquim não quer cestos com as 4 bolaschas iguais, nem com as 4 bolachas diferentes.

   Considerem-se, primeiramente, os cestos dos quais se escolhem 2 tipos de bolachas no início. Existem então ${}^{8}C_2$ selecccões possíveis. Tem-se então uma disposição do tipo $AB\_\_$ pelo que para ir de encontro ao que o Joaquim pretende, têm-se como possibilidades $ABAA$, $ABBB$ e $ABBA$ e uma vez que não interessa a ordem são apenas 3 formas de dispôr possíveis logo têm-se ${}^{8}C_2 \times 3$ cestos diferentes escolhendo 2 tipos de bolachas no início.
   Considerem-se agora os cestos dos quais escolhem-se 3 tipos de bolachas no início. Existem então ${}^{8}C_3$ selecções possíveis. Tem-se então uma disposição do tipo $ABC\_$ pelo que para ir de encontro ao que o Joaquim pretende, têm-se como possibilidades $ABCA$, $ABCB$ e $ABCC$ e uma vez que não interessa a ordem são apenas 3 formas de dispôr possíveis logo têm-se ${}^{8}C_3 \times 3$ cestos diferentes escolhendo 3 tipos de bolachas no início.

   Justifica-se assim o cálculo do Joaquim de, nas condições pretendidas por este, o número de cestos diferentes ser igual a ${}^{8}C_2 \times 3 + {}^{8}C_3 \times 3$.

FIM