Agrupamento de Escolas nº1 de Alcácer do Sal

MATEMÁTICA A - 12º Ano

Teste de Avaliação

12ºA - 27/02/2014

GRUPO I

As cinco questões deste grupo são de escolha múltipla.
· Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correta.
· Escreva na sua folha de respostas, a letra correspondente à alternativa que selecionar para cada questão.
· Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
· Não apresente cálculos.

1. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$), tais que $B \neq \emptyset$ e $A \subset B$.

   Qual é o valor de $P(A|\overline{B})$? ($\overline{B}$ designa o acontecimento contrário de B)?

   (A) 0 **(B)** $P(A)$ **(C)** $P(B)$ **(D)** 1

2. O Joaquim, o Luís e o Manuel, têm duas motas para se deslocarem. As motas são diferentes mas ambas podem ser ocupadas por uma ou duas pessoas. Qualquer um dos três está apto a conduzir qualquer uma das duas motas.

   De quantas formas diferentes podem os três amigos viajar?
   (consideramos situações diferentes, o mesmo par de amigos em motas diferentes, ou o mesmo par de amigos em lugares trocados na mesma mota).

   (A) ${}^3C_1 \times {}^2A_2$ **(B)** $2 \times {}^4C_3$ **(C)** $2 \times 3!$ **(D)** ${}^4A_3$

3. Sejam a e b dois números reais (com $a > 0$ e $b > 1$) tais que $a.\log_b a = 1$

   Qual é, para esses valores de a e de b, o valor de $\log_b \dfrac{1}{a^2}$?

   (A) $2 - a$ **(B)** $-2a$ **(C)** $-\dfrac{2}{a}$ **(D)** $2 - \dfrac{1}{a}$

4. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

   e a sucessão u_n, de termo geral $u_n = -\dfrac{1}{\ln n}$ (ln designa o logaritmo de base e).

   Qual é o valor de $\lim f(u_n)$?

   (A) $-\infty$ **(B)** $-\dfrac{1}{\ln 2}$ **(C)** 2 **(D)** $+\infty$

5. Qual o valor de $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^x - \ln x}{x}$?

   (A) $-\infty$ **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** $+\infty$

GRUPO II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.
Atenção: quando não é apresentada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exato.

1. Temos duas caixas com bolas.

   - Na *caixa A* estão 2 bolas. Uma é azul e a outra é vermelha.
   - Na *caixa B* estão 4 bolas numeradas de 0 a 3.

   Considere a experiência aleatória que consiste em retirar, em primeiro lugar, uma bola da *caixa A*, e depois,
   caso essa bola seja azul, retirar simultaneamente 2 bolas da *caixa B*;
   no caso de que a primeira bola retirada seja vermelha, retirar simultaneamente 3 bolas da *caixa B*.

   Considere ainda a variável aleatória:
   X:*Produto do número de todas as bolas retiradas da caixa B*

   1.1. Considere o acontecimento V:A primeira bola retirada é vermelha.
   Indique, justificando o valor de $P(V|X = 3)$.

   1.2. Construa a distribuição de probabilidade da variável X.
   Apresente os valores das probabilidades sob a forma de fração irredutível.

2. Aqueceu-se água num recipiente, durante um determinado tempo, num local onde a temperatura ambiente é constante e igual a 25º Celsius.
   Interrompeu-se o processo de aquecimento, e nesse instante, a água começou a arrefecer.
   O arrefecimento da água segue a Lei do arrefecimento de Newton, de acordo com o modelo matemático: $T(t) = 25 + 48e^{-0{,}05t}$, em que T representa a temperatura da água em graus Celsius, t minutos após o início do arrefecimento ($t > 0$).

   2.1. Recorrendo exclusivamente a métodos analíticos, determine $T(0)$ e $\lim\limits_{t \to +\infty} T(t)$.
   Interprete os valores obtidos, no contexto do problema.

   2.2. Recorrendo ao Teorema de Bolzano, prove que entre os 50 e os 60 minutos, a temperatura da água foi de 28º Celsius.

3. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \begin{cases} k-1 & \text{se } x \leq 3 \\ \dfrac{\ln(x-2)^2}{x-3} & \text{se } x > 3 \end{cases}$

3.1. Determine para que valor de k, a função é contínua no ponto de abcissa 3.

3.2. Resolva a equação $g(x) = \dfrac{6}{x-3}$ no intervalo $]3, +\infty[$

Formulário: (Limites notáveis):

$$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \ \ (n \in \mathbb{N}) \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \ \ (p \in \mathbb{R}) \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

COTAÇÕES:

	GRUPO I	
1 a 5	............5 × 10 pontos	50 pontos
		50 pontos
	GRUPO II	
1.		
1.1	....	25 pontos
1.2	....	25 pontos
2.		
2.1	....	25 pontos
2.2	....	25 pontos
3.		
3.1	....	25 pontos
3.2	....	25 pontos
		150 pontos
Total	....	**200 pontos**