Matemática A - 12º Ano

Resolução do 3º Teste de Avaliação - 2013/2014

Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal - AEAS

Nuno Miguel Guerreiro

pt.linkedin.com/in/nunomiguelguerreiro

Grupo I

1. Considerando os acontecimentos A e B e tendo em conta que $A \subset B$, podemos concluir que $P(A \cap B) = P(A)$ e que sendo $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$ então $P(A \cap \overline{B}) = 0$. Sabendo também que $B \neq \emptyset$, pretendemos calcular $P(A|\overline{B})$, vindo então:

$$P(A|\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{0}{P(\overline{B})} = 0$$

Resposta Correcta: (A)

2. O Joaquim, o Luís e o Manuel têm duas motas para se deslocarem. Cada uma tem duas lugares podendo estas levar 1 ou 2 pessoas (lembre-se que eles querem-se deslocar, logo, a mota que tiver 1 só pessoa terá de ter esta no lugar do condutor).
Para ocupar a mota que levará 1 só pessoa tem-se ${}^3C_1$ maneiras e restando 2 pessoas para a segunda mota, e, tendo em conta que ambos podem conduzir, então existem $2! = {}^2A_2$ maneiras de distribuir estas duas pessoas na mota. Conclui-se então que a resposta correcta ao problema é ${}^3C_1 \times {}^2A_2$.

Resposta Correcta: (A)

3. Sabe-se que a e b são dois números reais (com $a > 0$ e $b > 1$) tais que $a \cdot \log_b a = 1$.
Tem-se então: $a \cdot \log_b a = 1 \Leftrightarrow \log_b a = \frac{1}{a} \Leftrightarrow \log_b a = a^{-1}$.
Pretendemos calcular, para estes valores de a e de b, o valor de $\log_b \frac{1}{a^2}$ vindo:

$$\log_b \frac{1}{a^2} = \log_b a^{-2} = -2\log_b a = -2a^{-1} = -\frac{2}{a}$$

Resposta Correcta: (C)

4. Pretendemos calcular $\lim f(u_n)$ tendo em conta a sucessão de termo geral $u_n = -\frac{1}{\ln n}$. Temos então:

$$\lim f(u_n) = f(\lim u_n) = f\left(-\lim \frac{1}{\ln n}\right) = f\left(-\frac{1}{+\infty}\right) = f(-0^+) = f(0^-)$$

Tendo em conta a definição da função f conclui-se que $f(0^-)$ é dada por

$$f(0^-) = \frac{e^{0^-}}{0^-} = 1 \times \frac{1}{0^-} = 1 \times (-\infty) = -\infty$$

Resposta Correcta: (A)

5. Pretendemos calcular o valor doe lim $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^x - \ln x}{x}$. Tem-se então:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - \ln x}{x} = \frac{e^{0^+} - \ln(0^+)}{0^+} = (1 - (-\infty)) \times \frac{1}{0^+} = +\infty \times (+\infty) = +\infty$$

Resposta Correcta: (D)

Grupo II

1. Sabe-se que na *caixa A* estão 2 bolas sendo uma delas azul e outra vermelha. Na *caixa B* estão 4 bolas numeradas de 0 a 3, isto é, 1 bola com o número 0, outra com o número 1, outra com o número 2 e outra com o número 3. A experiência aleatória consiste em retirar uma bola da *caixa A* e se esta for azul, retirar-se-ão 2 bolas da *caixa B*. Caso seja vermelha, retirar-se-ão 3 bolas da *caixa B*.
   Considera-se a variável aleatória *X:"Produto do número de todas as bolas retiradas da caixa B"*.

   (1.1) Considerando o acontecimento *V: A primeira bola retirada é vermelha*, pretendemos indicar e justificar o valor de $P(V|X=3)$, isto é, da probabilidade de se retirar primeiro a bola vermelha, sabendo que o produto do número de todas as bolas retiradas da *caixa B* é 3.
   Se se retirou primeiro a bola vermelha, retiraram-se 3 bolas da *caixa B*. Repare que neste caso o produto dos números das bolas retiradas pode tomar os valores:

   - 0, em qualquer caso em que a bola 0 saia;
   - 6, no caso em que saiam a bola 1, a bola 2 e a bola 3.

   Logo, conclui-se que retirando primeiramente a bola vermelha, o produto dos números retirados nunca será 3 logo $P(V|X=3)=0$.

   (1.2) Tenha-se em conta o acontecimento V enunciado na alínea anterior e o acontecimento *A: "A primeira bola retirada é azul"*. Para um valor X_i da variável aleatória X temos:

   $$P(X=X_i)=P(V|X=X_i)\times P(V)+P(A|X=X_i)\times P(A)$$

   Como existem duas bolas na *caixa A*, temos que $P(V)=P(A)=\frac{1}{2}$.
   Tendo em conta a alínea anterior calcule-se $P(V|X=0)$ e $P(V|X=6)$ vindo:

   - $P(V|X=0)=\dfrac{3}{^4C_3}=\dfrac{3}{4}$
   - $P(V|X=6)=\dfrac{1}{^4C_3}=\dfrac{1}{4}$

   No caso da primeira bola a ser retirada da *caixa A* retiram-se 2 bolas da *caixa B*. Neste caso, o produto dos números das bolas retiradas pode tomar os valores:

   - 0, em qualquer caso em que a bola 0 saia;
   - 2, no caso em que saiam a bola 1 e a bola 2;
   - 3, no caso em que saiam a bola 1 e a bola 3;
   - 6, no caso em que saiam a bola 2 e a bola 3.

   Tendo em conta o referido acima, temos que:

   - $P(A|X=0)=\dfrac{3}{^4C_2}=\dfrac{1}{2}$
   - $P(A|X=2)=P(A|X=3)=P(A|X=6)=\dfrac{1}{^4C_2}=\dfrac{1}{6}$

   Desta forma conclui-se que:

   - $P(X=0)=P(V|X=0)\times\frac{1}{2}+P(A|X=0)\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$
   - $P(X=2)=P(V|X=2)\times\frac{1}{2}+P(A|X=2)\times\frac{1}{2}=0+\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$
   - $P(X=3)=P(V|X=3)\times\frac{1}{2}+P(A|X=3)\times\frac{1}{2}=0+\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$
   - $P(X=6)=P(V|X=6)\times\frac{1}{2}+P(A|X=6)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{24}$

   A tabela de distribuição de probabilidade da variável X é então:

$P(X=0)$	$P(X=2)$	$P(X=3)$	$P(X=6)$
$^5/_8$	$^1/_{12}$	$^1/_{12}$	$^5/_{24}$

2. Aqueceu-se água num recipiente, durante um determinado tempo, num local onde a temperatura é constante e igual a 25^o. Interrompeu-se este processo de aquecimento para dar início ao arrefecimento da água segundo o modelo matemático $T(t) = 25 + 48e^{-0,05t}$ em que T representa a temperatura da água em graus Celsius t minutos após o início do arrefecimento ($t > 0$).

(2.1) Determine-se, recorrendo exclusivamente a métodos analíticos, $T(0)$ e $\lim\limits_{t\to+\infty} T(t)$.
Vem então:

$$T(0) = 25 + 48e^{-0,05\times 0} = 25 + 48e^0 = 25 + 48 = 73$$

Deste resultado concluímos que o processo de arrefecimento começou quando o recipiente se encontrava à temperatura de 73 graus Celsius.
Calculando $\lim\limits_{t\to+\infty} T(t)$ tem-se:

$$\lim_{t\to+\infty} T(t) = \lim_{t\to+\infty} (25 + 48e^{-0,05t}) = 25 + 48e^{-0,05(+\infty)} = 25 + 48e^{-\infty} = 25 + 48\times 0 = 25$$

Conclui-se então que o processo de arrefecimento fará com que o recipiente se aproxime, à medida que o tempo passa, para a temperatura ambiente ($T = 25$).

(2.2) A função $T(t)$ é uma função contínua em $[50, 60]$ pois trata-se da soma de uma constante com uma função exponencial que é uma função contínua. Estamos então nas condições de aplicação do Teorema de Bolzano. Para provar que entre os 50 e os 60 minutos, a temperatura da água foi de 28 graus Celsius devemos calcular $T(50)$ e $T(60)$ tal que:

$$T(50) = 25 + 48e^{-0,05\times 50} \approx 28,94 \qquad T(60) = 25 + 48e^{-0,05\times 60} \approx 27,39$$

Conclui-se, portanto, que $T(60) < 28 < T(50)$, logo, sendo $T(t)$ uma função contínua, o Teorema de Bolzano permite escrever:

$$\exists\, c\,]50, 60[:\ T(c) = 28$$

3. Considere-se a função g de domínio $\mathbb{R}$.

(3.1) De forma a que g seja contínua no ponto de abcissa 3 deve-se verificar:

$$\lim_{x\to 3^+} g(x) = g(3) = \lim_{x\to 3^-} g(x)$$

Calculemos então $\lim\limits_{x\to 3^+} g(x)$ vindo:

$$\lim_{x\to 3^+} g(x) = \lim_{x\to 3^+} \tfrac{\ln(x-2)^2}{x-3} = \underbrace{2\lim_{x\to 3^+}\frac{\ln(x-2)}{x-3}}_{\substack{\text{Se } x-2=y+1 \text{ vem} \\ y\to 0^+ \text{ pois } x\to 3^+}} = \underbrace{2\lim_{y\to 0^+}\frac{\ln(y+1)}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = 2\times 1 = 2.$$

Ora, temos então que $g(3) = \lim\limits_{x\to 3^-} g(x) = k - 1$ deve ser igual a $\lim\limits_{x\to 3^+} g(x)$ de forma a que g seja contínua, logo:

$$k - 1 = \lim_{x\to 3^+} g(x) \Leftrightarrow k - 1 = 2 \Leftrightarrow k = 3$$

Conclui-se então que ,de forma a que g seja contínua no ponto de abcissa 3, k deve ser igual a 3.

(3.2) Pretendemos resolver a equação $g(x) = \frac{6}{x-3}$ no intervalo $]3, +\infty[$.
Neste intervalo temos $g(x) = \frac{\ln(x-2)^2}{x-3}$, pelo que vem então:

$$\frac{\ln(x-2)^2}{x-3} = \frac{6}{x-3} \Leftrightarrow \underbrace{\ln(x-2)^2 = 6}_{\text{Uma vez que } x\neq 3} \Leftrightarrow (x-2)^2 = e^6 \Leftrightarrow (x-2) = \pm e^3 \Leftrightarrow x = 2 + e^3 \vee x = 2 - e^3$$

Repare-se que $x = 2 + e^3$ pertence ao intervalo $]3, +\infty[$, contudo, a solução $x = 2 - e^3$ não pertence a $]3, +\infty[$. Conclui-se então que a solução da equação é $x = 2 + e^3$.

Nota: Caso se aplicasse a propriedade do logaritmo $\ln(x-2)^2 = 2\ln(x-2)$ perder-se-ia uma solução.