



Agrupamento de Escolas nº1 de Alcácer do Sal
MATEMÁTICA A - 12º Ano

Teste de Avaliação — 12ºA — 28/03/2014

GRUPO I

As cinco questões deste grupo são de escolha múltipla.

- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correta.
- Escreva na sua folha de respostas, a letra correspondente à alternativa que selecionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Na figura ao lado estão reproduzidas as 28 peças que compõem o jogo de dominó.

Considere a experiência aleatória que consiste em selecionar, ao acaso, uma das 28 peças do jogo.

Considere o acontecimento

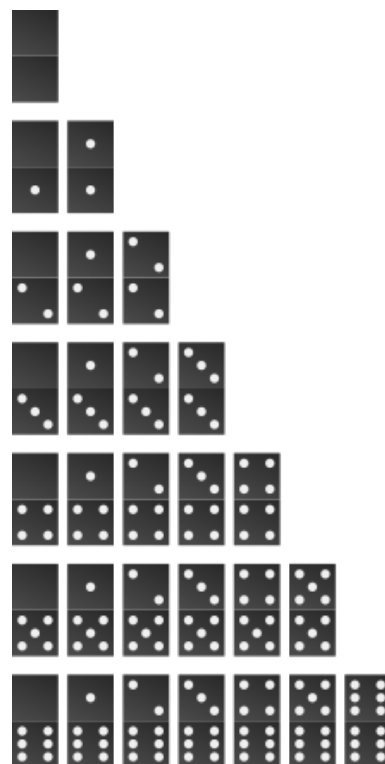
D : «Retirar uma peça com os dois **números diferentes**»

e a variável aleatória

X : «**Soma** das pintas da peça retirada»

Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(X = 5|D)$?

- (A) $\frac{1}{28}$ (B) $\frac{3}{28}$
(C) $\frac{1}{21}$ (D) $\frac{1}{7}$



2. A soma de todos os números da linha 100 do Triângulo de Pascal é um número natural k . Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) $\log_2 k = 100$ (B) $\log_{100} k = 2$ (C) $\log_k 100 = 2$ (D) $\log_k 2 = 100$



3. Sejam a e b dois números reais (com $a > 0$ e $b > 1$) tais que $a \times b^a = 1$

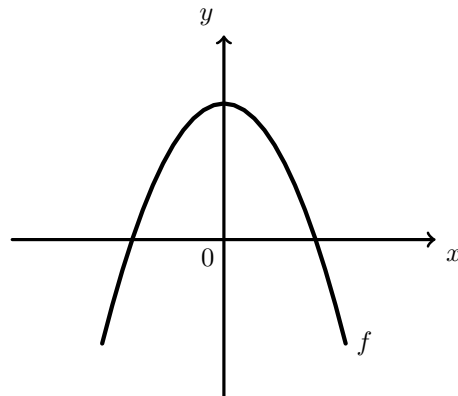
Qual é, para esses valores de a e de b , o valor de $\log_b \frac{\sqrt{b}}{a}$?

- (A) $-2 + a$ (B) $\frac{1}{2} + a$ (C) $\frac{1}{2a}$ (D) $\frac{1}{2} + \frac{1}{a}$

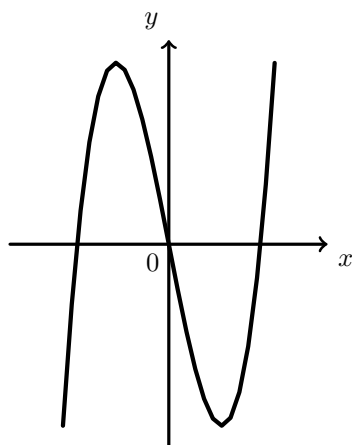
4. Na figura ao lado, está representada, num referencial ortogonal xOy , parte do gráfico de uma função polinomial f , de grau 2

Seja g uma função, de domínio \mathbb{R} , definida por $g(x) = f(x) \times f'(x)$ (f' designa a derivada de f)

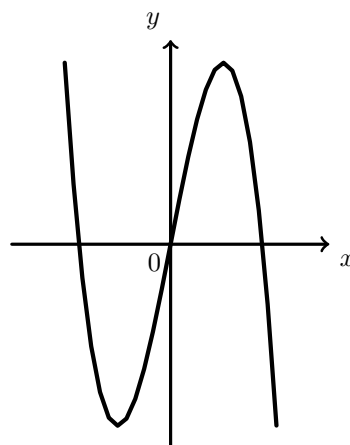
Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função g ?



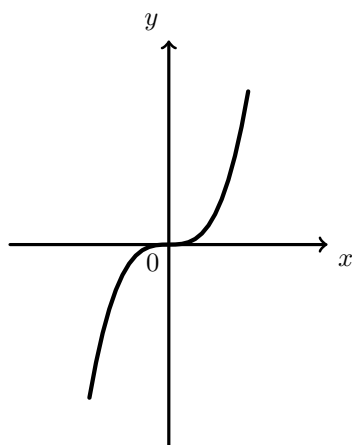
(A)



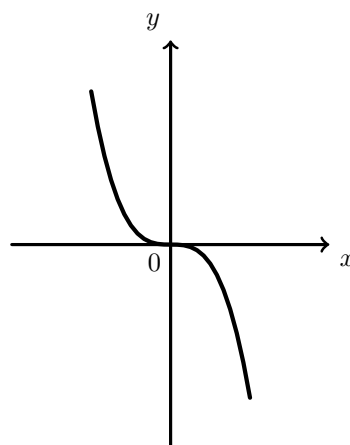
(B)



(C)



(D)



5. Uma função f tem domínio \mathbb{R} . Sabe-se que a reta $y = 3x + 1$ é tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1.

Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x) - 2f(1)}{x - 1}$?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 6



GRUPO II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é apresentada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exato.

1. A turma do Joaquim é constituída por 8 rapazes 10 raparigas.
 - 1.1. Supondo que em todas as aulas o professor selecciona, ao acaso, um aluno (rapaz ou rapariga) para responder a uma pergunta sobre a aula anterior, qual é a probabilidade de que, num conjunto de 10 aulas, o Joaquim seja selecionado exatamente por 2 vezes?
(Apresente os cálculos que efetuar e o resultado sob a forma de dízima arredondado às centésimas).
 - 1.2. Para representar a turma do Joaquim na organização do baile de finalistas, é necessário escolher 3 elementos da turma. Como não houve voluntários, foi decidido escolher três alunos da turma, ao acaso.
Considere a variável aleatória X : «Número de rapazes que integram a comissão»
Construa a distribuição de probabilidade da variável X .
Apresente os valores das probabilidades sob a forma de fração irredutível.

2. Considere a função f de domínio $]1, +\infty[$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2 \ln(x-1)}{2-x} & \text{se } 1 < x < 2 \\ \frac{x^3}{-2x^2 + 2x} & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

- 2.1. Mostre que a função f é contínua no domínio.
 - 2.2. Estude a função f quanto à existência de assíntotas do seu gráfico.
3. O telemóvel do Joaquim estava a ficar sem bateria, por isso, o Joaquim ligou-o à corrente e deixou a carregá-lo durante algum tempo até o desligar para sair de casa.
O Joaquim tem uma aplicação que permite analisar a carga da bateria, e aproximar a variação da carga ao logo do tempo por uma função.
Quando consultou a aplicação, o Joaquim verificou que t horas depois de ter ligado o telemóvel à corrente, a carga, C (em percentagem), durante as 24 horas seguintes, era bem aproximada pela função

$$C(t) = 30t^2 e^{-0.5t} + 5, \quad t \in [0, 24]$$

- 3.1. Qual era a percentagem de carga da bateria, 30 minutos depois do Joaquim ter ligado o telemóvel à corrente?
Apresente o resultado em percentagem, arredondado às unidades.
- 3.2. Sabendo que a carga máxima foi registada no momento em que o Joaquim desligou o telemóvel da corrente, determine, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, quanto tempo esteve o telemóvel ligado à electricidade, a carregar a bateria.



4. Sejam f e g duas funções contínuas, de domínio \mathbb{R}_0^+ .
Sabe-se que:

- $f(0) = -1$
- $g'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}_0^+$
- os gráficos de f e g intersectam-se no ponto $P(2, 5)$

Mostre que a equação $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = 0$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]0, 2[$.

FORMULÁRIO:

(Limites notáveis):

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

(Derivadas):

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$(e^u)' = u'e^u$$

$$(a^u)' = u'a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

COTAÇÕES:

GRUPO I

1 a 5 5 × 10 pontos 50 pontos

50 pontos

GRUPO II

- | | | |
|----|-----------|-----------|
| 1. | | |
| | 1.1 | 20 pontos |
| | 1.2 | 22 pontos |
| 2. | | |
| | 2.1 | 22 pontos |
| | 2.2 | 22 pontos |
| 3. | | |
| | 3.1 | 20 pontos |
| | 3.2 | 22 pontos |
| 4. | | 22 pontos |

150 pontos

Total..... 200 pontos

