Matemática A - 12º Ano

Resolução do 4º Teste de Avaliação - 2013/2014

Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal - AEAS

Nuno Miguel Guerreiro

pt.linkedin.com/in/nunomiguelguerreiro

Grupo I

1. Considerando o acontecimento D:"Retirar uma peça com os dois números diferentes"e a variável aleatória X:"Soma das pintas da pela retirada", é pedida a probabilidade $P(X=5|D)$ (probabilidade de retirando uma peça com os dois números diferentes, a soma destes ser igual a 5).
   Reparemos que existem 21 peças com dois números diferentes e que destas apenas as peças (3,2), (4,1) e (5,0) têm a soma dos seus números igual a 5. Desta forma concluímos que a probabilidade pedida é $P(X=5|D)=\frac{3}{21}=\frac{1}{7}$.

   Resposta Correcta: (D)

2. A soma de todos os elementos de uma linha $n, n \in \mathbb{N}$ do Triângulo de Pascal é dada por 2^n. Neste caso sabemos que a soma de todos os números da linha $100 (n=100)$ do Triângulo de Pascal é um número natural k, logo:
   $$2^{100}=k \Leftrightarrow 100=\log_2 k \Leftrightarrow \log_2 k=100$$
   Repare-se que $\log_a b=c$ é equivalente a $b=a^c$ com $a>1$ e $b>0$.

   Resposta Correcta: (A)

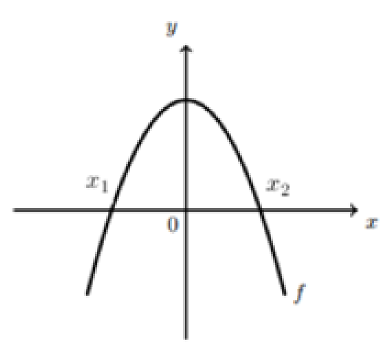
3. Sabe-se que a e b são dois números naturais com $a>0$ e $b>1$ tais $a \times b^a=1$. Repare-se que:
   $$a \times b^a=1 \Leftrightarrow a=\frac{1}{b^a} \Leftrightarrow a=(b^a)^{-1}$$
   Pretende-se calcular $\log_b \frac{\sqrt{b}}{a}$, pelo que seguindo as propriedades do logaritmo vem:
   $$\log_b \frac{\sqrt{b}}{a}=\log_b \sqrt{b}-\log_b a=\log_b b^{\frac{1}{2}}-\log_b (b^a)^{-1}=\frac{1}{2}\log_b+\log_b b^a=\frac{1}{2}\times 1+a=\frac{1}{2}+a$$

   Resposta Correcta: (B)

4. Na figura ao lado, está representado o gráfico da função f. Repare-se que f tem zeros em $x=x_1$ e $x=x_2$ e que tendo f um máximo em $x=0$ então $f'(0)=0$. Desta forma podemos construir a seguinte tabela de sinais:

	$-\infty$	x_1		0		x_2	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$g(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

   Desta forma podemos concluir que o único gráfico que corresponde aos sinais acima é o gráfico da alínea (A) (função g tem de ser negativa em $]-\infty, 0[\cup]0, x_2[$, positiva em $]x_1, 0[\cup]x_2, +\infty[$ e anular-se em $x=x_1$, $x=x_2$ e $x=0$).



   Resposta Correcta: (A)

5. A função f tem domínio $\mathbb{R}$ e a recta $y = 3x + 1$ é tangente ao gráfico de f no ponto $x = 1$. Concluímos então que o declive desta recta tangente que representa o valor da derivada de f no ponto $x = 1$ é $m = 3$, pelo que vem $f'(1) = 3$.
Pretendemos calcular o limite:

$$\lim_{x\to 1} \frac{2f(x) - 2f(1)}{x - 1} = 2 \underbrace{\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}}_{f'(1)} = 2f'(1) = 2 \times 3 = 6$$

Repare-se que pela definição de derivada de uma função f num ponto $x = a$, tem-se $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Resposta Correcta: (D)

Grupo II

1. A turma do Joaquim tem 18 alunos tendo 8 rapazes e 10 raparigas.

(1.1) Seleccionando ao acaso um aluno da turma, a probabilidade deste ser o Joaquim é $\frac{1}{18}$. Se em 10 aulas vai ser seleccionado ao acaso um aluno, a probabilidade desse mesmo ser o Joaquim exactamente duas vezes pode ser calculada através de uma distribuição binomial sendo dada por:

$$^{10}C_2 \times \left(\frac{1}{18}\right)^2 \times \left(\frac{17}{18}\right)^8 \approx 0,09$$

(1.2) Vai ser criada a organização do baile de finalistas composta por 3 alunos escolhidos ao acaso. Considerando a variável aleatória X:"Número de rapazes que integram a comissão", temos que X pode tomar valores $X = 0$, $X = 1$, $X = 2$ e $X = 3$.
Calculando os valores de $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = 2)$ e $P(X = 3)$ temos:

$P(X = 0) = \frac{^{10}C_3}{^{18}C_3} = \frac{120}{816} = \frac{5}{34}$ $\qquad$ $P(X = 1) = \frac{^{10}C_2 \times {^8C_1}}{^{18}C_3} = \frac{15}{34}$

$P(X = 2) = \frac{^{10}C_1 \times {^8C_2}}{^{18}C_3} = \frac{35}{102}$ $\qquad$ $P(X = 3) = \frac{^8C_3}{^{18}C_3} = \frac{7}{102}$

Desta forma podemos construir a distruibuição de probabilidade da variável X vindo:

$P(X = 0)$	$P(X = 1)$	$P(X = 2)$	$P(X = 3)$
$^5/_{34}$	$^{15}/_{34}$	$^{35}/_{102}$	$^7/_{102}$

2. Considere-se a função f de domínio $]1, +\infty[$.

(2.1) A função f é contínua em $1 < x < 2$ pois trata-se do quociente de duas funções contínuas (função logaritmo e função polinomial) e também em $x > 2$ pois trata-se do quociente de duas funções contínuas (duas funções polinomiais).
Resta então analisar a continuidade em $x = 2$ de forma a concluir a continuidade de f no seu domínio. De forma a que f seja contínua em $x = 2$ deve-se verificar $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$.
Deve-se então calcular estes mesmos limites, vindo:

- $\lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) = \frac{2^3}{-2(2)^2+2\times 2} = -2$
- $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{2\ln(x-1)}{2-x} = 2 \lim_{x\to 2^-} \frac{\ln(x-1)}{2-x} =$ (Se $x-1 = y+1$ vem $y \to 0^-$ pois $x \to 2^-$)
$2 \lim_{y\to 0^-} \frac{\ln(y+1)}{-y} = -2 \underbrace{\lim_{y\to 0^-} \frac{\ln(y+1)}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = -2 \times 1 = -2$

Ora, como $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) = -2$, conclui-se que f é contínua em $x = 2$ e, consequentemente, no seu domínio.

(2.2) A função f tem domínio $]1,+\infty[$ pelo que devemos estudar a existência de assíntotas quando $x \to 1^+$, vindo então:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{2\ln(x-1)}{2-x} = 2\,\frac{\ln(1^+-1)}{2-1} = 2\ln(0^+) = -\infty$$

Como $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$, tem-se que a recta de equação $x=1$ é assíntota vertical do gráfico de f.
Analise-se agora as assíntotas não verticais do gráfico de f tendo em conta que estas são rectas de equações $y = mx+b$ tal que $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ e $b = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-mx)$ (repare que $x\to+\infty$ pois f está definida em $]1,+\infty[$). Calculando os parâmetros vem:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x(-2x^2+2x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{-2x^3+2x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3\left(-2+\frac{2}{x}\right)} = \frac{1}{-2+\frac{2}{+\infty}} = -\frac{1}{2}$$

Tem-se então que $m = -\frac{1}{2}$ pelo que $b = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+\frac{1}{2}x\right)$, tal que:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+\frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{-2x^2+2x}+\frac{x}{2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+(-x^2+x)(x)}{-2x^2+2x} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{-2x^2+2x} = \frac{x^2}{x^2\left(-2+\frac{2}{x}\right)} = \frac{1}{-2+\frac{2}{+\infty}} = -\frac{1}{2}$$

Conclui-se então que sendo $m=-\frac{1}{2}$ e $b=-\frac{1}{2}$, a recta de equação $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ é assíntota oblíqua do gráfico de f.

3. C representa a carga (em percentagem) após t horas do momento em que ligou o telemóvel à corrente.

(3.1) Passados 30 minutos depois do Joaquim ter ligado o telemóvel à corrente, isto é, $t = 0,5$ horas depois, a percentagem de carga da bateria do telemóvel é:

$$C(0,5) = 30(0,5)^2 e^{-(0,5)(0,5)} + 5 \approx 11\%$$

A percentagem de carga da bateria do telemóvel do Joaquim passados 30 minutos de estar ligado à corrente é, aproximadamente, 11%.

(3.2) A carga máxima foi registada no momento em que o Joaquim desligou o telemóvel da corrente. Para determinar o tempo que o telemóvel esteve ligado à corrente devem-se encontrar os zeros de C'. Defina-se a primeira derivada de C, C':

$$C'(t) = 30[(t^2)'e^{-0,5t} + t^2(e^{-0,5t})'] + 0 = 2te^{-0,5t} - 0,5t^2e^{-0,5t} = e^{-0,5t}(2t-0,5t^2)$$

Tem-se então que determinar as soluções de $C'(t)=0$ vindo:

$$C'(t)=0 \Leftrightarrow e^{-0,5t}(2t-0,5t^2)=0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{-0,5t}=0}_{\substack{\text{Equação}\\\text{Impossível}}} \vee 2t-0,5t^2=0 \Leftrightarrow t(2-0,5t)=0 \Leftrightarrow t=0 \vee t=4$$

Repare-se que $e^{-0,5t} > 0,\ \forall\, t\in[0,24]$, pelo que nunca se anula neste intervalo.
Tendo em conta que, no contexto do problema, só tem sentido real analisar C e C' para $t\in[0,24]$, de acordo com a tabela de sinais temos:

	0		4		24
$C'(t)$	0	+	0	−	+
$C(t)$		↗	MAX	↘	

Conclui-se então que a carga máxima foi registada 4 horas depois de o telemóvel ter sido ligado à corrente.

4. Considere-se uma função h definida por $h(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$. Sendo f e g duas funções contínuas em $[0,2]$, então h tratando-se do quociente de duas funções contínuas, é também uma função contínua em $[0,2]$. Estamos, portanto, nas condições de aplicar o Teorema de Bolzano.

   Retira-se de $g'(x) < 0, \forall\, x \in \mathbb{R}_0^+$ que g é descrescente no seu domínio e portanto, considerando dois pontos x_1 e x_2 tais que $x_1 > x_2$, pode-se concluir que $g(x_1) < g(x_2)$.
   Se os gráficos de f e g se intersectam no ponto $P(2,5)$, pode-se concluir que $f(2) = g(2) = 5$, pelo que calculando a imagem de h no ponto $x = 2$ temos:

$$h(2) = \left(\frac{f}{g}\right)(2) = \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{5}{5} = 1 > 0$$

   Quanto ao ponto de abcissa 0, sabe-se que $f(0) = -1$ e também que sendo $0 < 2$ então $g(0) > g(2)$ como justificado acima. Logo $g(0) > 5 > 0$, vindo então:

$$h(0) = \left(\frac{f}{g}\right)(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = \frac{-1}{\underbrace{g(0)}_{g(0)>0}} < 0$$

   Tem-se então $h(0) \times h(2) < 0$, pelo que do Corolário do Teorema de Bolzano conclui-se que h tem uma solução no intervalo $]0,2[$, mais concretamente um zero, isto é:

$$\exists\, c \in]0,2[:\ h(c) = 0$$