



Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal  
MATEMÁTICA A - 12º Ano

Teste de Avaliação — 12ºA — 29/05/2014

GRUPO I

As cinco questões deste grupo são de escolha múltipla.

- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correta.
- Escreva na sua folha de respostas, a letra correspondente à alternativa que selecionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Temos um conjunto de 10 cartas diferentes, constituído pelos 4 ases do baralho e pelas 6 figuras vermelhas. Considere a experiência aleatória que consiste em retirar, ao acaso, uma carta deste conjunto de 10, e considere os acontecimentos:

*A*: Retirar um ás

*V*: Retirar uma carta vermelha

Qual dos acontecimentos seguintes é o mais provável?

- (A)  $P(A)$       (B)  $P(A|V)$       (C)  $P(V|A)$       (D)  $P(A \cap V)$

2. Considere números reais  $a$ ,  $b$  e  $c$  ( $a > 1$ ,  $b \in \mathbb{R}$  e  $c > 0$ ) tais que:

$$\log_a(c) = b + 1$$

Qual é, para esses valores de  $a$ , de  $b$  e de  $c$ , o valor de  $\ln c$ ? ( $\ln$  designa o logaritmo de base  $e$ )

- (A)  $\ln a + b \ln a$       (B)  $a \times b \ln a$       (C)  $a + b \ln a$       (D)  $1 + b \ln a$

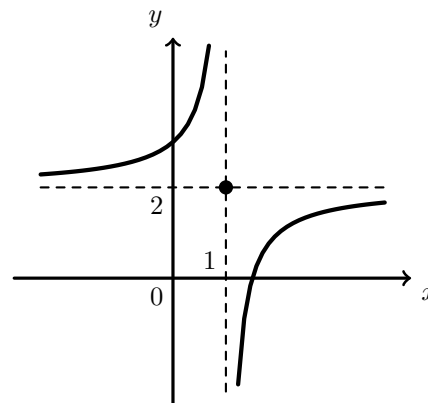
3. Na figura ao lado, está representada, num referencial ortogonal  $xOy$ , parte do gráfico de uma função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$

Tal como a figura sugere, as retas definidas pelas equações  $x = 1$  e  $y = 2$  são assíntotas do gráfico de  $f$ , e  $f(1) = 2$ .

Seja  $u_n$  a sucessão definida por  $u_n = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$ , com o argumento do cosseno em radianos.

Qual é o valor de  $\lim f(u_n)$ ?

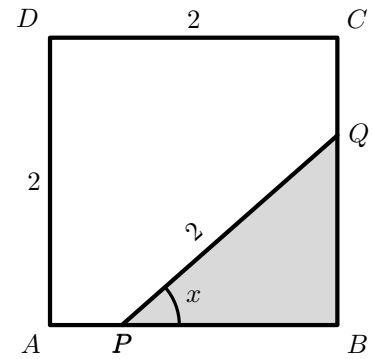
- (A)  $-\infty$       (B) 1      (C) 2      (D)  $+\infty$



4. Na figura ao lado, está representado, um quadrado  $[ABCD]$  de lado 2. Está ainda representado um segmento  $[PQ]$ , que verifica as condições seguintes:

- $\overline{PQ} = 2$
- o ponto  $P$  desloca-se sobre o lado  $[AB]$  e o pontos  $Q$  tem um deslocamento correspondente sobre o lado  $[BC]$  de tal modo que  $\overline{PQ} = 2$
- $x$  é a amplitude do ângulo  $BPQ$

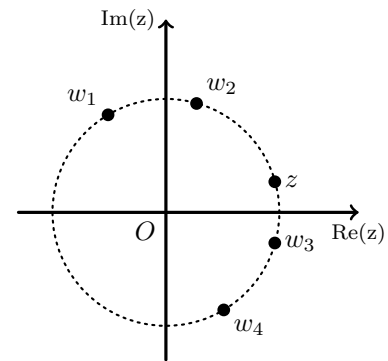
Para cada valor de  $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ , qual das expressões seguintes dá a área do triângulo  $[PBQ]$  em função de  $x$ ?



- (A)  $\sin(2x)$       (B)  $2 \sin(2x)$       (C)  $\sin x \cos x$       (D)  $\frac{\sin x \cos x}{2}$

5. Na figura ao lado, estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de cinco números complexos ( $z, w_1, w_2, w_3$  e  $w_4$ ) situadas sobre a circunferência de raio 1 e centro na origem.

Qual é o número complexo que pode ser igual a  $z^2 \times i^3$ ?



- (A)  $w_1$       (B)  $w_2$       (C)  $w_3$       (D)  $w_4$

## GRUPO II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

**Atenção:** quando não é apresentada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exato.

1. Considere o número complexo  $z = 2 \operatorname{cis} \left( \frac{5\pi}{3} \right)$

1.1. Calcule  $\frac{-4i}{z} - 3\sqrt{3} - i$  e apresente o resultado na forma trigonométrica.

1.2.  $z$  é uma das três raízes cúbicas de um certo número complexo  $w$ .

As representações geométricas das 3 raízes cúbicas do número complexo  $w$  definem um triângulo. Calcule o valor exato da área desse triângulo.

2. O Joaquim e a sua irmã Berta estiveram numa festa com mais 18 amigos (20 pessoas no total).

Todos concordaram que, nessa festa, só se iriam tirar fotografias onde estivessem 5 pessoas.

Considere que qualquer um dos 20 amigos tinha igual probabilidade de surgir numa fotografia, independentemente de qualquer outra pessoa surgir, ou não, na mesma fotografia.

2.1. Quantas são os grupos diferentes de 5 pessoas que podem surgir numa fotografia, em que esteja o Joaquim ou a Berta, mas não os dois em simultâneo (considere que a ordem pela qual as pessoas surgem na fotografia é irrelevante)?

2.2. Selecionando, ao acaso, uma fotografia retirada na festa, qual é a probabilidade de que o Joaquim e a Berta apareçam ambos nessa fotografia?

(Apresente o resultado sob a forma de fração irredutível).



3. Estude a função  $f(x) = 3x + xe^{-x} + 1$ , de domínio  $\mathbb{R}^+$ , quanto à existência de assíntotas do seu gráfico.
4. Considere a função  $g$  de domínio  $\mathbb{R}$  definida por  $g(x) = \text{sen}(3x) - e^x$
- 4.1. Recorrendo à definição de derivada num ponto determine  $g'(0)$ .
- 4.2. O gráfico da função  $g$  tem um ponto de inflexão no intervalo  $] -1, 0[$ .  
 Determine a abcissa desse ponto, recorrendo às capacidades da calculadora gráfica.  
 Explique como procedeu e apresente um esboço do(s) gráfico(s) que visualizar.  
 Indique o valor da abcissa arredondado às centésimas.

**FORMULÁRIO:**

**(Derivadas):**

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(\text{sen } u)' = u' \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \text{sen } u$$

$$(\text{tg } u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$(e^u)' = u'e^u$$

$$(a^u)' = u'a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

**(Limites notáveis):**

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

**COTAÇÕES:**

<b>GRUPO I</b>		
1 a 5	..... 5 × 10 pontos .....	50 pontos
		<b>50 pontos</b>
<b>GRUPO II</b>		
1.	1.1 .....	22 pontos
	1.2 .....	22 pontos
2.	2.1 .....	22 pontos
	2.2 .....	20 pontos
3.	.....	22 pontos
4.	4.1 .....	20 pontos
	4.2 .....	22 pontos
		<b>150 pontos</b>
<b>Total.....</b>		<b>200 pontos</b>

**(Trigonometria):**

$$\text{sen}(a + b) = \text{sen } a \cos b + \text{sen } b \cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \text{sen } a \text{sen } b$$

$$\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \text{tg } b}$$

**(Complexos):**

$$(\text{cis } \theta)^n = \rho^n \text{cis}(n\theta)$$

$$\sqrt[n]{\rho \text{cis } \theta} = \sqrt[n]{\rho} \text{cis} \frac{\theta + 2k\pi}{n} \quad (k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N})$$

