Matemática A - 12º Ano

Resolução do 5º Teste de Avaliação - 2013/2014

Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal - AEAS

Nuno Miguel Guerreiro

pt.linkedin.com/in/nunomiguelguerreiro

Grupo I

1. Temos um conjunto de 10 cartas diferentes, constituído pelos 4 ases do baralho e as 6 figuras vermelhas. Repare-se que 2 dos ases do baralho são cartas vermelhas, pelo que temos 8 cartas vermelhas e 4 ases num total de 10 cartas diferentes.
   Considerando a experiência aleatória que consiste em retirar, ao acaso, uma carta deste conjunto de 10, e os acontecimentos:

   - *A: Retirar um ás*
   - *V: Retirar uma carta vermelha*

   Temos que $P(A) = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$, $P(A|V) = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$, $P(V|A) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ e $P(A \cap V) = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$.
   Conclui-se então que o acontecimento $P(V|A)$ é o mais provável.

   Resposta Correcta: (C)

2. Tendo em conta os números reais a, b e c ($a > 1, b \in \mathbb{R}$ e $c > 0$) tais que $log_a c = b + 1$ então tendo em conta que $log_a b = \frac{log_x b}{log_x a}$ em que $x > 1$, vem:

$$log_a c = b + 1 \Leftrightarrow \frac{\ln c}{\ln a} = b + 1 \Leftrightarrow \ln c = (b+1)\ln a \Leftrightarrow \ln c = \ln a + b \ln a$$

   Resposta Correcta: (A)

3. Repare-se que a função f não tem limite para $x \to 1$ pelo que não é contínua neste ponto. A sucessão definida por $u_n = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$ tem limite e este é dado por $\lim u_n = \cos\left(\frac{\pi}{+\infty}\right) = \cos(0^+) = 1^-$. (Repare que, por exemplo, $\cos(0,01) = 0,999 < 1$). Desta forma conclui-se que $\lim f(u_n) = f(\lim u_n) = f(1^-) = +\infty$.

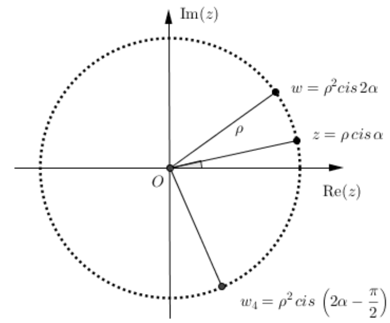
   Resposta Correcta: (D)

4. Pretendemos determinar para $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, a expressão que dá a área do triângulo $[PBQ]$ em função de x. Tendo em conta que $\overline{PQ} = 2$ vem:

$$\left.\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{\overline{QB}}{2} \Leftrightarrow \overline{QB} = 2\sin x = h_{[PBQ]} \\ \cos x = \dfrac{\overline{PB}}{2} \Leftrightarrow \overline{PB} = 2\cos x = b_{[PBQ]} \end{array}\right\} \quad A_{[PBQ]} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2\sin x \cdot 2\cos x}{2} = 2\sin x \cos x = \sin(2x)$$

   Resposta Correcta: (A)

5. Tendo em conta que $z = \rho \, cis \, \alpha$ temos que, pela Fórmula de De Moivre, $z^2 = \rho^2 \, cis \, (2\alpha)$. É referido que o complexo z está situado sobre a circunferência de raio 1 e centro na origem pelo que então vem $\rho = 1$ e, portanto, $\rho^2 = 1$.
Na figura ao lado temos representado o complexo w tal que $w = z^2$. Ora, contudo, o complexo que procuramos é dado por $z^2 \times i^3 = -iz^2 = cis\left(-\frac{\pi}{2}\right) \times \rho^2 \, cis \, (2\alpha) = \rho^2 \, cis \, \left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$.
Concluímos então por observação da figura que o complexo que pode ser igual a $z^2 \times i^3$ é o complexo w_4.



Resposta Correcta: (D)

Grupo II

1. Consideremos o número complexo $z = 2 \, cis \, \left(\frac{5\pi}{3}\right)$.

(1.1) Pretendemos apresentar na forma trigonométrica o resultado de $\dfrac{-4i}{z} - 3\sqrt{3} - i$.
Repare-se que $z = 2 \, cis \, \left(\frac{5\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right) = 1 - \sqrt{3}i$ e então temos que $\frac{-4i}{z}$ é dado por:

$$\frac{-4i}{z} = \frac{-4i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{(-4i)(1+\sqrt{3}i)}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)} = \frac{4\sqrt{3}-4i}{4} = \sqrt{3} - i$$

Temos então $\frac{-4i}{z} - 3\sqrt{3} - i = \sqrt{3} - i - 3\sqrt{3} - i = -2\sqrt{3} - 2i$.
Considerando $w = -2\sqrt{3} - 2i = \rho \, cis \, \theta$ tal que:

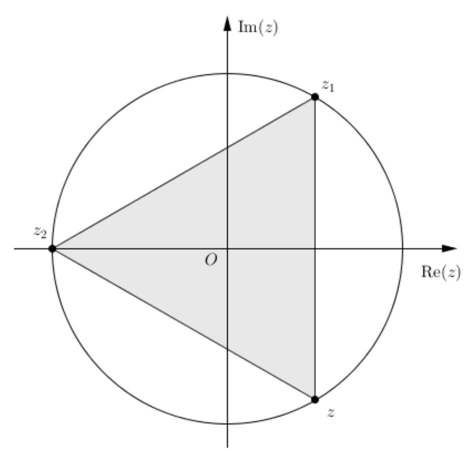
- $\rho = \sqrt{\text{Re}(w)^2 + \text{Im}(w)^2} = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = 4$
- $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\text{Im}(w)}{\text{Re}(w)}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-2}{-2\sqrt{3}}\right) = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$ pois $w \in 3^{\text{o}}$ Quadrante.

Conclui-se que $w = \frac{-4i}{z} - 3\sqrt{3} - i = 4 \, cis \, \left(\frac{4\pi}{3}\right)$.

(1.2) Considere o número complexo w dado por $w = \rho \, cis \, \alpha$. As raízes cúbicas de w são dadas por $\sqrt[3]{w} = \frac{\rho}{3} \, cis \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{2\pi k}{3}\right), k \in \{0,1,2\}$. Concluímos então que sendo $z = 2 \, cis \, \left(\frac{5\pi}{3}\right)$ uma das raízes cúbicas de w então temos que $\frac{\rho}{3} = 2$ e que $\arg(z) = \frac{5\pi}{3} = \frac{\alpha}{3} + \frac{2\pi k}{3}$ para um qualquer valor de $k \in \{0,1,2\}$. Consideremos que $\arg(z) = \frac{5\pi}{3}$ deu-se para $k = 0$, então para:

- Para $k = 1$ temos $\arg(z_1) = \frac{5\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{3} = 2\pi + \frac{\pi}{3}$
- Para $k = 2$ temos $\arg(z_2) = \frac{5\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = 3\pi = 2\pi + \pi$

Podemos então considerar que as outras duas raízes cúbicas de w, z_1 e z_2 têm argumentos $\frac{\pi}{3}$ e π, respectivamente.
Tendo em conta que $z = 1 - \sqrt{3}i$, $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ e $z_2 = -2$ temos então que a altura do triângulo é dada por $h = 1 + 2 = 3$ e que a base é dada por $b = \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ vindo então que a área do triângulo definido pelas raízes cúbicas do número complexo w é A$=\frac{3 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.



2. Consideramos nesta questão uma festa com 20 pessoas no total e em que qualquer fotografia só poderá ter 5 pessoas destas 20. O Joaquim e a Berta são duas das vinte pessoas na festa.

(2.1) Pretendemos calcular o número de grupos diferentes de 5 pessoas que podem surgir numa fotografia, em que esteja ou o Joaquim ou a Berta não simultaneamente. Os grupos que podem ser formados são todos os grupos excepto aqueles em que nem o Joaquim nem a Berta aparecem nem aqueles em que os dois aparecem simultaneamente, logo, temos que o número de grupos diferentes de 5 pessoas que podem surgir numa fotografia nas condições acima referidas é:

$$^{20}C_5 - (^{18}C_5 + {}^{18}C_3) = 6120$$

Poderia também optar por calcular o número de grupos em que o Joaquim pode aparecer tendo em conta que a Berta não poderá aparecer ou seja $^{18}C_4$ pois o Joaquim já foi seleccionado e a Berta não pode ser seleccionada, logo só podem ser seleccionadas 18 pessoas. Aplicando o mesmo raciocínio para a Berta vem que o número de grupos diferentes de 5 pessoas que podem surgir numa fotografia nas condições acima referidas é:

$$2 \cdot {}^{18}C_4 = 6120$$

(2.2) Pretendemos calcular a probabilidade de que o Joaquim e a Berta apareçam ambos na mesma fotografia. Os casos possíveis são todos os grupos de 5 pessoas que podem ser formados com um grupo de 20 pessoas, logo, $^{20}C_5$. Os casos favoráveis são os grupos em que os dois aparecem simultaneamente, isto é, $^{18}C_3$ pois estando o Joaquim e a Berta na fotografia, só existem mais 18 pessoas para escolher para 3 lugares na fotografia. A probabilidade é dada por:

$$\frac{^{18}C_3}{^{20}C_5} \approx 0,0526$$

3. Pretendemos estudar a função f quanto à existência de assíntotas do seu gráfico. Estando f definida em $\mathbb{R}^+$ podemos analisar a existência de assíntotas verticais para $x = 0$, vindo então:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (3x + xe^{-x} + 1) = 3 \times 0 + 0 \times e^0 + 1 = 1$$

Como $\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \pm\infty$, não existe assíntota vertical do gráfico de f.
Estudemos agora a existência de assíntotas não verticais. Para tal definindo a equação da recta de uma assíntota de oblíqua como $y = mx + b$ temos $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ e $b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx)$ (repare que $x \to +\infty$ pois f está definida em $\mathbb{R}^+$). Calculando os parâmetros vem:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x + xe^{-x} + 1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(3 + e^{-x} + \frac{1}{x}\right) = 3 + e^{-\infty} + \frac{1}{+\infty} = 3 + 0 + 0 = 3$$

Desta forma vem que:

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - 3x) = \lim_{x\to+\infty} (3x + xe^{-x} + 1 - 3x) = \lim_{x\to+\infty} xe^{-x} + 1 = 1 + \lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 1 + \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x}$$

Tendo em conta o limite notável $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ vem:

$$b = 1 + \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 1 + \frac{1}{\underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}}_{\text{Lim. Notável}}} = 1 + \frac{1}{+\infty} = 1$$

Conclui-se então que a recta de equação $y = 3x + 1$ é uma assíntota oblíqua do gráfico de f.

4. Considere-se a função g de domínio $\mathbb{R}$ definida por $g(x) = \sin(3x) - e^x$.

(4.1) Recorrendo à definição de derivada num ponto pretendemos determinar $g'(0)$. Ora, pela definição referida atrás vem que:

$$g'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{g(h+a) - g(a)}{h}$$

Pretendendo calcular $g'(0)$ temos $a = 0$ tal que $g(0) = \sin(3 \times 0) - e^0 = -1$, vindo:

$$g'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(3h) - e^h + 1}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{\sin(3h)}{h} - \frac{e^h - 1}{h} \right) =$$

$$3 \lim_{h\to 0} \frac{\sin(3h)}{3h} - \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}}_{\text{Lim. Notável}} = 3 \lim_{h\to 0} \frac{\sin(3h)}{3h} - 1$$

(fazendo $y = 3h$ vem $y \to 0$ pois $h \to 0$)

$$3 \lim_{h\to 0} \frac{\sin(3h)}{3h} - 1 = 3 \underbrace{\lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y}}_{\text{Lim. Notável}} -1 = 3 - 1 = 2$$

Conclui-se então que $g'(0) = 2$.

(4.2) O gráfico da função g tem um ponto de inflexão no intervalo $]-1, 0[$, isto é, a segunda derivada de g anula-se em $]-1, 0[$. Comecemos então por calcular a segunda derivada de g.
A primeira derivada g' é dada por:

$$g'(x) = (3x)' \cos(3x) - (e^x)' = 3\cos(3x) - e^x$$

Logo, derivando novamente obtemos g'':

$$g''(x) = -3(3x)' \sin(3x) - (e^x)' = -9\sin(3x) - e^x$$

Através das capacidades gráficas da calculadora consegue-se obter os zeros de g'' em $]-1, 0[$. Obtém-se que sendo o ponto A o zero de g'' então $x_A = -0,04$. Sendo este o único zero de g'' em $]-1, 0[$ e sabendo que g tem um ponto de inflexão neste intervalo, então a abcissa deste é $x = -0,04$.
Repare-se ainda que $g''(x) < 0$ em $]-0.04, 0[$ e $g''(x) > 0$ em $]-1, -0.04[$, logo mudando o sinal da segunda derivada em g'' em $x = -0,04$ então as concavidades de g mudam em $x = -0,04$ (concavidade virada para cima em $]-1, -0.04[$ e concavidade virada para baixo em $]-0.04, 0[$), concluindo-se, assim, que $x = -0,04$ é um ponto de inflexão de g.