Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal
Teste de Matemática A

3 de abril de 2023

12.º Ano - Turma A

---

1. Seja E o espaço amostral associado a uma certa experiência aleatória.

   Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset E$ e $B \subset E$).

   Sabe-se que:

   - $P(A) = 0{,}4$
   - $P(B) = 0{,}6$
   - $P(B|A) = 0{,}25$

   Qual é o valor de $P(A \cup B)$?

   (A) 0,1 **(B)** 0,15 **(C)** 0,75 **(D)** 0,9

2. Um saco contém vinte bolas, numeradas de 1 a 20.
   Ao acaso, extraem-se simultaneamente três bolas do saco e anotam-se os respetivos números.
   Determine o valor da probabilidade de o maior desses três números ser 6 .

   Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

3. Sejam a e b números reais, com $b > 1$, tais que $\log_b a = 5$.

   Qual é o valor de $\log_a(ab)$?

   (A) $\frac{1}{5}$ **(B)** $1 + \frac{1}{5}$ **(C)** $a + \frac{1}{5}$ **(D)** $b + \frac{1}{5}$

4. Considere a função de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \ln x$

   Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to k} \dfrac{x-k}{f(x) - f(k)}$?

   (A) k **(B)** k^2 **(C)** $\frac{1}{k}$ **(D)** $\frac{1}{k^2}$

5. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = x^2 \times e^x$

5.1. Determine, sem recorrer à calculadora gráfica, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa 1

5.2. Estude, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora, a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem concavidade voltada para cima;
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de g

6. Considere a função h de domínio $]-\infty,\pi[$, para cada número real positivo k, definida por

$$h(x) = \begin{cases} k + e^{x+1} & \text{se } x \leq 0 \\ \dfrac{x}{\operatorname{sen} x} & \text{se } 0 < x < \pi \end{cases}$$

6.1. Para um certo número real k, a função h é contínua.
Qual é o valor de k ?

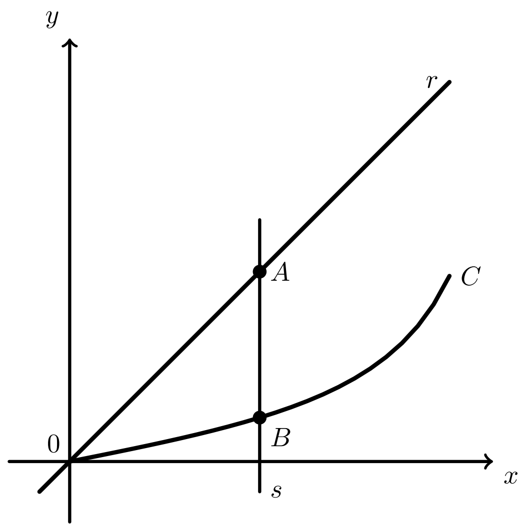
(A) e **(B)** $-e$ **(C)** $1-e$ **(D)** $1+e$

6.2. Estude a função h quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico paralelas aos eixos coordenados e, caso estas existam, escreva as respetivas equações.

6.3. Mostre que a equação $h(x) = 1 - \cos(2x)$ tem, pelo menos, uma solução em $\left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$, recorrendo a métodos analíticos.
Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

7. Na figura ao lado estão representadas, em referencial o. n. xOy

- uma curva C, gráfico da função f, de domínio $[0{,}2\pi]$, definida por $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{5}\right)$
- uma reta r, gráfico da função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = x$
- uma reta s paralela ao eixo Oy



Sejam A e B os pontos de interseção da reta s com a curva C e com a reta r, respetivamente.
Imagine que a reta s se desloca, mantendo-se sempre paralela ao eixo Oy.
Os pontos A e B acompanham, naturalmente, o deslocamento da reta s.

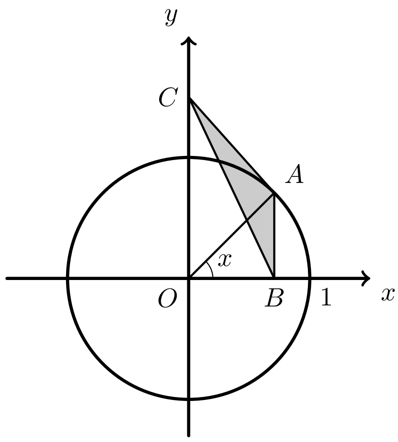
Seja x a abcissa do ponto A.

Recorrendo à calculadora, determine $x \in [0{,}2\pi]$ para o qual a distância entre os pontos A e B é máxima.

Na sua resposta:

- exprima a distância entre os pontos A e B em função de x;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) determinar o valor máximo da distância entre os pontos A e B, e as coordenadas dos pontos relevantes arredondados às centésimas;
- apresente o valor de distância máxima, arredondado às centésimas.

8. Na figura ao lado, estão representados, num referencial o.n. xOy, uma circunferência de raio 1 e o triângulo $[ABC]$.



Sabe-se que:

- o ponto A pertence à circunferência;
- a reta AB é paralela ao eixo Oy;
- o ponto C pertence ao eixo Oy.

Para cada posição do ponto A, seja x a amplitude do ângulo BOA $\left(x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$

Qual das seguintes expressões dá a área do triângulo $[ABC]$, representado a sombreado, em função de x ?

(A) $\operatorname{sen}(2x)$ **(B)** $2\operatorname{sen}(2x)$ **(C)** $\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}$ **(D)** $\frac{\operatorname{sen}(2x)}{4}$

COTAÇÕES

Item											
Cotação (em pontos)											
1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.1.**	**5.2.**	**6.1.**	**6.2.**	**6.3.**	**7.**	**8.**	TOTAL
16	20	16	16	20	20	16	20	20	20	16	**200**
CP	CP	CM	CP	CP	CP	CP	CP	CP	CM	CM	

Tipologia dos itens:
CP: Conceitos e procedimentos;
CM: Capacidades Matemáticas.

FORMULÁRIO:

(Derivadas):

$(u+v)' = u' + v'$
$(uv)' = u'v + uv'$
$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$
$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$
$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
$(u^n)' = nu^{n-1}u' \ (n \in \mathbb{N})$
$(e^u)' = u'e^u$
$(a^u)' = u'a^u \ln a \ (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$
$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$
$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a} \ (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

(Limites notáveis):

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e \ \ (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \ \ (p \in \mathbb{R})$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

(Trigonometria):

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$
$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$