Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal
Teste de Matemática A

1 de junho de 2023

12.º Ano - Turma A

---

1. Num saco estão bolas numeradas de 1 a 20. As bolas numeradas de 1 a 15 são vermelhas e as restantes são azuis.

   1.1. São retiradas 2 bolas do saco, simultaneamente e ao acaso.
   Qual é a probabilidade de ser retirado um par de bolas, ambas da mesma cor e ambas com o respetivo número par?

   (A) $\frac{^7C_2 \times ^3C_2}{^{20}C_2}$ **(B)** $\frac{^7C_2 + ^3C_2}{^{20}C_2}$ **(C)** $\frac{^{15}C_2 \times ^{10}C_2}{^{20}C_2}$ **(D)** $\frac{^{15}C_2 + ^{10}C_2}{^{20}C_2}$

   1.2. Com as 20 bolas no saco, retirou-se ao acaso uma delas e verificou-se que era vermelha.
   Determine a probabilidade da bola retirada ter um número ímpar.
   Apresente o resultado na forma de fração.

2. Sejam a e b números reais, com $b > 1$, tais que $\log_b\left(\frac{a}{b}\right) = 5$.

   Qual é o valor de $\log_b a$?

   (A) $\frac{1}{5}$ **(B)** 4 **(C)** 5 **(D)** 6

3. Determine, sem recorrer à calculadora, os números reais que são solução da equação

$$\ln(2 - e^x) = 2x$$

4. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}^+$
   A reta de equação $y = 2x + 5$ é assíntota do gráfico da função f

   Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{5x}$?

   (A) 2 **(B)** 5 **(C)** $\frac{2}{5}$ **(D)** $\frac{5}{2}$

5. Considera a função h, de domínio $]0{,}5[$, definida por $h(x) = \ln(x) + \operatorname{sen} x$

Sabe-se que:

- O é a origem do referencial.
- A é um ponto do gráfico de h de abcissa x.
- B é o ponto do eixo Ox com abcissa x.

Recorrendo à calculadora, determine o valor de $x \in]0{,}5[$ para o qual a área do triângulo $[OAB]$ é máxima.

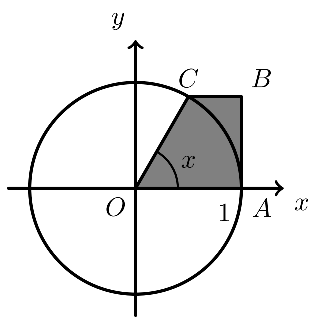
Na sua resposta:

- exprima a a área do triângulo $[OAB]$ em função de x;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) determinar o valor máximo da área do triângulo $[OAB]$, e as coordenadas dos pontos relevantes arredondados às centésimas;
- apresente o valor de área máxima, arredondado às centésimas.

6. Na figura ao lado, estão representados, num referencial o.n. xOy, uma circunferência centrada na origem e de raio 1, e o trapézio retângulo $[OABC]$, a sombreado.
Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(1, 0)$;
- o vértice O do triângulo $[OAB]$ coincide com a origem do referencial;
- o ponto C desloca-se ao longo da semicircunferência superior.

Para cada posição do ponto C, seja x a amplitude do ângulo AOC, com $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$



6.1. Mostre que a área do trapézio $[OABC]$ é dada em função de x por

$$\operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4}$$

6.2. Mostre que existe pelo menos um valor de x, para o qual o trapézio $[OABC]$ tem área igual a $\frac{1}{2}$, recorrendo a métodos analíticos.
Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

7. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $w = 3\sqrt{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{8}\right)}$.

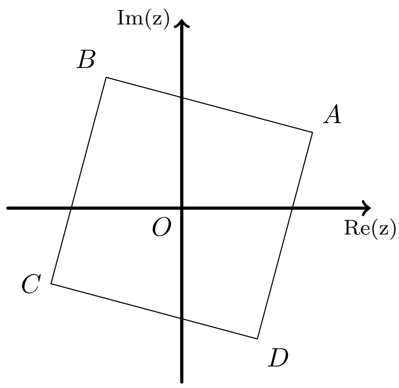
Escreva, sem recorrer à calculadora, o complexo $\frac{w}{1-i} \times i^{45}$ na forma trigonométrica.

8. Considere, em $\mathbb{C}$, o número complexo w.

No plano complexo, a imagem geométrica de w é o vértices C do quadrado $[ABCD]$, com centro na origem O, representado na figura ao lado.

Qual dos números complexos seguintes tem como imagem geométrica o vértice B do quadrado?

(A) $-w$ **(B)** $\overline{w}$ **(C)** iw **(D)** $-iw$



9. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = e^{i\theta}$, com $\theta \in [0{,}2\pi[$, uma das raizes cúbicas de um número complexo w. Sejam z_2 e z_3 as outras raízes cúbicas de w.

   Mostre que $z_1 \times z_2 \times z_3 = e^{i3\theta}$.

COTAÇÕES

Item											
Cotação (em pontos)											
1.1.	**1.2.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.1.**	**6.2.**	**7.**	**8.**	**9.**	TOTAL
15	20	15	20	15	20	20	20	20	15	20	**200**
CP	CP	CM	CP	CM	CM	CP	CP	CP	CP	CM	

Tipologia dos itens:
CP: Conceitos e procedimentos;
CM: Capacidades Matemáticas.

FORMULÁRIO:

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$
$(uv)' = u'v + uv'$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$
$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$
$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$(u^n)' = nu^{n-1}u' \ (n \in \mathbb{N})$
$(e^u)' = u'e^u$
$(a^u)' = u'a^u \ln a \ (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$
$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \ (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Complexos

$\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$
$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{\frac{i\theta + 2k\pi}{n}}, k \in \{0{,}1{,}...{,}n-1\}$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \ (n \in \mathbb{N})$
$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$
$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \ (p \in \mathbb{R})$
$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$
$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$