

Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal

Teste de Matemática A

30 de março de 2023

12.º Ano - Turma D

1. O Joaquim pretende definir uma palavra passe de autenticação numa plataforma da Internet com 5 caracteres. Decidiu que usaria os caracteres #,A,a,1 e que iria repetir um deles.

Quantas palavras passe diferentes podem ser definidas pelo Joaquim?

- (A) $4 \times 4!$ (B) $5 \times 5!$ (C) $4 \times 5!$ (D) $5 \times 4!$

2. Seja E o espaço amostral associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset E$ e $B \subset E$).

Sabe-se que:

- $P(A \cup B) = 0,7$
- $P(B) = 0,4$
- $P(A \cap B) = 0,2$

Determine o valor da probabilidade condicionada $P(B|A)$

3. Sejam a , b e k , números reais e que $a > 1$

Sabendo que $a^k = e$ e que $\ln a = b$ qual é o valor de k ?

- (A) $\frac{1}{b}$ (B) $\frac{e}{b}$ (C) $\frac{1}{be}$ (D) $\frac{5}{b}$

4. Sabendo que $h'(a) = 3$ indique o valor de $\lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x) - h(a)}{ax - a^2}$

- (A) $3a$ (B) $\frac{3}{a}$ (C) $\frac{a}{3}$ (D) $\frac{1}{3a}$



5. Seja g a função, de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $g(x) = (x+2)\ln x$

5.1. Determine, sem recorrer à calculadora gráfica, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa 1

5.2. Estude, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora, a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem concavidade voltada para cima;
- as coordenadas do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de g

6. Considere a função f de domínio \mathbb{R}^+ , para cada número real positivo k , definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x}{x} & \text{se } 0 < x < \frac{3\pi}{2} \\ \log_2(k+x) & \text{se } x \geq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

6.1. Para um certo número real k , a função f é contínua.

Qual é o valor de k ?

- (A) $\frac{2-3\pi}{2}$ (B) $\frac{3\pi-2}{2}$ (C) $\frac{3\pi-3}{2}$ (D) $\frac{3\pi-3}{3}$

6.2. Estude a função f quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico paralelas aos eixos coordenados e, caso estas existam, escreva as respetivas equações.

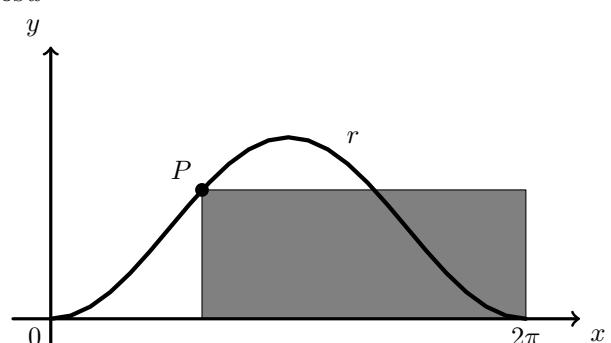
6.3. Mostre que a equação $10f(x) = -1$ tem, pelo menos, uma solução em $\left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$, recorrendo a métodos analíticos.

Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

7. Seja r a função, de domínio $[0, 2\pi]$, definida por $r(x) = 1 - \cos x$

Na figura ao lado está representado, em referencial orto-normado xOy , o gráfico da função r .

Considere que um ponto P se desloca ao longo do gráfico de r . Para cada posição do ponto P , considere o retângulo em que um dos lados está contido no eixo Ox , outro na reta de equação $x = 2\pi$ e os outros dois nas retas vertical e horizontal que passam pelo ponto P .



Recorrendo à calculadora gráfica, determine o valor máximo da área do retângulo.

Na sua resposta:

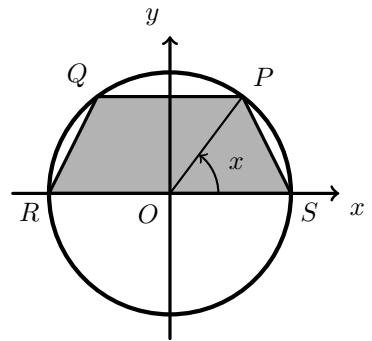
- exprime a área do retângulo em função da abcissa de P ;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) determinar a abcissa de P a que corresponde a área máxima, e as coordenadas dos pontos relevantes arredondados às milésimas;
- apresente o valor de área máxima, arredondado às centésimas.



8. Na figura ao lado está representado o círculo trigonométrico.

Os pontos P , Q , R e S pertencem à circunferência, sendo PQ a reta paralela ao eixo Ox . O ponto S pertence ao eixo Ox . Seja x a amplitude do ângulo SOP , $\left(x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$.

Qual das expressões seguintes representa, em função de x , a área do trapézio $[PQRS]$?



(A) $\frac{2\sin x + \sin(2x)}{2}$

(B) $\frac{2\cos x + \sin(2x)}{2}$

(C) $\frac{2\sin x + \cos(2x)}{2}$

(D) $\frac{2\cos x + \cos(2x)}{2}$

COTAÇÕES

Item											
Cotação (em pontos)											
1.	2.	3.	4.	5.1.	5.2.	6.1.	6.2.	6.3.	7.	8.	TOTAL
16	20	16	16	20	20	16	20	20	20	16	200
CP	CP	CM	CP	CP	CP	CP	CP	CP	CM	CM	

Tipologia dos itens:

CP: Conceitos e procedimentos;

CM: Capacidades Matemáticas.

FORMULÁRIO:

(Derivadas):

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(\sin u)' = u' \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \sin u$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$(e^u)' = u'e^u$$

$$(a^u)' = u'a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

(Limites notáveis):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

(Trigonometria):

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

